AIDA F. DA SILVA MUNHOZ
ALCEBÍADES VIEIRA
IRACEMA IKIEZAKI

LIVRO DO PROFESSOR
CORTESIA DA EDITORA
E DO AUTOR

MAI

MATEMÁTICA AUTO-INSTRUTIVO 2

2º GRAU

edição SARAIVA

MATEMÁTICA 2
AUTO-INSTRUTIVO

Supervisão Editorial:
José Lino Fruet

Capa:
João Gargiulli

FICHA CATALOGRÁFICA

(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP)

M932m
2ª
2º grau

Munhoz, Aida Ferreira da Silva.
MAI, matemática auto-instrutivo: 2ª série, 2º grau [por] Aida F. da Silva Munhoz, Alcebíades Vieira [e] Iracema Ikiezaki. São Paulo, Saraiva, 1975.
p. ilust.

Suplementado pelo livro do professor.

1. Matemática (2º grau) – Instrução programada I. Ikiezaki, Iracema. II. Vieira, Alcebíades, 1940 – III. Título.

75–0751

17. CDD–510.077
18. –510.77

Índice para catálogo sistemático:
1. Instrução programada: Matemática 510.077 (17.)
510.77 (18.)

SARAIVA S.A. – LIVREIROS EDITORES

RUA FORTALEZA, 53 – CAIXA POSTAL: 2362
TELEFONES: 32-1149 • 32-2534 • 34-9503 • 34-9685
END. TELEGRÁFICO: ACADÊMICA • SÃO PAULO

AIDA F. DA SILVA MUNHOZ
ALCEBÍADES VIEIRA
IRACEMA IKIEZAKI

MAI

MATEMÁTICA AUTO-INSTRUTIVO 2

2ª SÉRIE / 2º GRAU

LIVRO DO PROFESSOR
Somente o livro do professor contém as respostas dos exercícios

edição SARAIVA
1975

Estudante:

O livro **Matemática Auto-instrutivo** foi programado pensando em você, na sua participação, no seu interesse, tornando-o elemento ativo no processo de aprendizagem.

Procuramos apresentar cada assunto deste livro de modo simples, claro e objetivo.

A cada apresentação de um conceito segue-se uma série de afirmações, algumas verdadeiras e outras falsas, e à medida que você assinala as verdadeiras a fixação desse conceito se faz naturalmente, preparando-o assim para as aplicações que vêm a seguir.

Nessas aplicações, você deverá completar os exercícios propostos e é importante que esse completamento seja feito seguindo a orientação sugerida, pois ela está baseada nos conhecimentos já adquiridos por você.

Ao final de cada capítulo, apresentamos duas seqüências de exercícios. A seqüência A, cuidadosamente analisada, apresentada em grau crescente de dificuldade e dosada de modo a atingir os objetivos propostos em cada capítulo, dá-lhe condições de prosseguir no desenvolvimento do conteúdo para a aquisição de novos conceitos. A seqüência B ficará a critério do seu professor, face à disponibilidade de tempo e outras variáveis que direta ou indiretamente influem no processo de aprendizagem.

Com a apresentação desta obra, retrato de uma longa experiência no ensino de 2º grau, reiteramos nossa firme convicção que sempre norteou nossos ideais: **nós acreditamos em você.**

Os autores.

Índice

Seqüências Reais

Neste capítulo, pretende-se que o aluno esteja apto a:

a) conceituar seqüências.

b) reconhecer seqüências convergentes e seqüências divergentes.

SEQÜÊNCIA

1. **Definição:**

Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $n \mapsto y = a_n$, ou seja, f é uma função que faz corresponder ao natural 1 o número real a_1, ao natural 2 o número real a_2, ao natural 3 o número real a_3 e assim por diante.

O conjunto das imagens $a_1, a_2, a_3, \ldots$ escrito nessa ordem é chamado de **seqüência real** e é indicado por:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$$

onde a_1 é o primeiro termo da seqüência,

a_2 é o segundo termo da seqüência,

a_n é o n-ésimo termo da seqüência.

Pode-se, também, indicar a seqüência por (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **Aplicação:**

1º) Assinale as afirmações corretas, considerando a função

$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$
$n \mapsto y = a_n$, onde $a_n = 3n$

a. (X) Ao natural 1, f faz corresponder o real $a_1 = 3$.
b. ( ) Ao natural 1, f faz corresponder o real $a_1 = 1$.
c. ( ) Ao natural 2, f faz corresponder o real $a_2 = 4$.
d. (X) Ao natural 2, f faz corresponder o real $a_2 = 6$.
e. (X) Ao natural 3, f faz corresponder o real $a_3 = 9$.
f. (X) $f = \{(1; 3), (2; 6), (3; 9), (4; 12), \ldots, (n; 3n), \ldots\}$.
g. (X) Domínio de f é $D = \mathbb{N}^*$.
h. ( ) Imagem de f é $Im = \{1, 5, 9, \ldots, 2n, \ldots\}$.
i. (X) Imagem de f é $Im = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$.

j. (X) (3, 6, 9, ..., 3n, ...) é a seqüência definida por f.

l. (X) $a_1 = 3$ é o primeiro termo da seqüência.

m. ( ) $a_2 = 6$ é o terceiro termo da seqüência.

n. (X) $a_2 = 6$ é o segundo termo da seqüência.

o. (X) $a_5 = 15$ é o quinto termo da seqüência.

2º) Considere a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $n \mapsto y = a_n$, onde $a_n = 2n - 5$ e complete:

a) Ao natural 1, f faz corresponder o real $a_1 = $ ...-3... .

b) Ao natural 2, f faz corresponder o real ...a_2... = −1.

c) Ao natural 3, f faz corresponder o real ...a_3... = ...1... .

d) Ao natural 4, f faz corresponder o real ...a_4... = ...3... .

e) Ao natural n, f faz corresponder o real ...a_n... = ...$2n-5$... .

f) f = {(1; ...-3...), (...$2; -1$...), (...$3; 1$...), ..., (n; ...$2n-5$...), ...}.

g) D(f) = ...$\mathbb{N}^*$... e Im (f) = {...$-3, -1, 1, 3, \ldots, 2n-5, \ldots$ }... .

h) (...$-3, -1, 1, 3, \ldots, 2n-5, \ldots$)... é a seqüência definida por f.

i) O primeiro termo da seqüência é $a_1 = $ ...-3... .

j) O segundo termo da seqüência é ...a_2... = ...-1... .

l) O terceiro termo da seqüência é ...a_3... = ...1... .

m) O oitavo termo da seqüência é ...a_8... = ...11... .

n) O vigésimo termo da seqüência é ...a_{20}... = ...35... .

o) O n-ésimo termo da seqüência é ...a_n... = ...$2n-5$... .

3. Estudaremos apenas as seqüências onde os termos se sucedem obedecendo a uma certa **lei de formação**, deixando de lado as seqüências cujos termos são tomados ao acaso.

Assim, estudaremos as seqüências dadas:

1º) Através da **lei que associa a cada n a sua imagem** a_n, onde a_n é o **termo geral** da seqüência.

Exemplo: $a_n = 3n - 1$

Então,
$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$
$a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$
$a_4 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$ etc.

E a seqüência é (2, 5, 8, 11, ...).

2º) Através de uma **lei de recorrência**, ou seja, uma lei que permite calcular cada termo a partir do anterior, sendo conhecido o primeiro termo da seqüência.

Exemplo: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 5, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Então:
$a_1 = 2$
$a_2 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7$
$a_3 = a_2 + 5 = 7 + 5 = 12$
$a_4 = a_3 + 5 = 12 + 5 = 17$ etc.

E a seqüência é (2, 7, 12, 17, ...).

4. **Aplicação**:

1º) Dada a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $n \mapsto y = a_n$, onde $a_n = 5n$, complete:

a) O primeiro termo da seqüência é a_1 = 5 .
b) O segundo termo da seqüência é a_2 = 10 .
c) O terceiro termo da seqüência é a_3 = 15 .
d) O décimo quinto termo da seqüência é a_{15} = 75 .
e) O quinquagésimo termo da seqüência é a_{50} = 250 .
f) A seqüência é (5, 10, 15, 20, ...).

2º) Determine o décimo quarto termo da seqüência cujo termo geral é dado por $a_n = \frac{3n+2}{n}$.

$a_{14} = \frac{3 \cdot 14 + 2}{14} = \frac{42 + 2}{14} = \frac{44}{14} = \frac{22}{7}$

3º) Escreva a seqüência cujo termo geral é dado por $a_n = (-1)^n$.

(−1, 1, −1, 1, ...)

4º) Dada a seqüência através da lei de recorrência

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 6, \text{ com } n \geqslant 2, \text{ complete:} \end{cases}$$

a) O primeiro termo da seqüência é a_1 = 3 .
b) O segundo termo da seqüência é a_2 = 0 .
c) O terceiro termo da seqüência é a_3 = −6 .
d) O quarto termo da seqüência é a_4 = −18 .
e) O sétimo termo da seqüência é a_7 = −186 .
f) A seqüência é (3, 0, −6, −18, ...).

5º) Dada a seqüência através da lei de recorrência

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = \frac{a_{n-1} + 2}{2}, \text{ com } n \geqslant 2, \text{ determine o seu quinto termo.} \end{cases}$$

$a_5 = \frac{29}{16}$

Exercícios a resolver: itens 1 a 5, pág. 16.

TERMOS EQÜIDISTANTES DE UMA SEQÜÊNCIA

5. Definição:

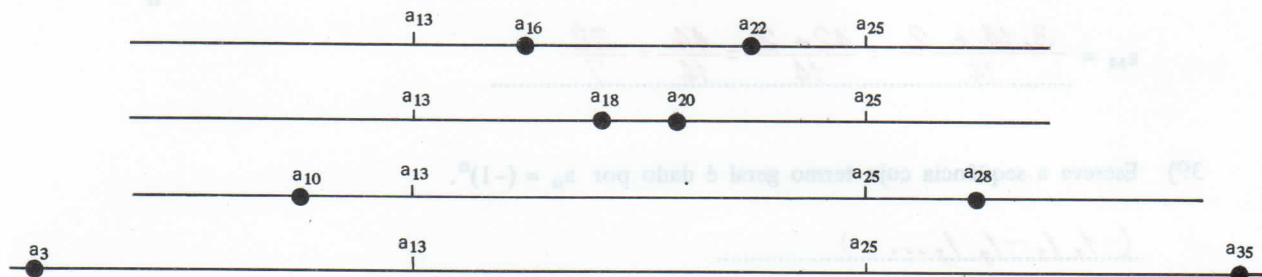
Seja a seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., a_p, ..., a_q, ..., a_m, ...)$.

Dizemos que dois termos a_n e a_m são **termos equivalentes aos termos a_p** e a_q se o número de termos que sucedem a_n até a_p é igual ao número de termos que precedem a_m até a_q e, reciprocamente, a_p e a_q são eqüidistantes de a_n e a_m se o número de termos que precedem a_p até a_n é igual ao número de termos que sucedem a_q até a_m.

Assim:

a) a_{13} e a_{25} são eqüidistantes de
$$\begin{cases} a_{16} \text{ e } a_{22} \\ a_{18} \text{ e } a_{20} \\ a_{10} \text{ e } a_{28} \\ a_{3} \text{ e } a_{35} \end{cases}$$

Veja graficamente:



b) a_{20} e a_{32} são eqüidistantes de
$$\begin{cases} a_{23} \text{ e } a_{29} \\ a_{22} \text{ e } a_{30} \\ a_{16} \text{ e } a_{36} \\ a_{12} \text{ e } a_{40} \end{cases}$$

c) a_n e a_m são eqüidistantes de
$$\begin{cases} a_{n-2} \text{ e } a_{m+2} \\ a_{n+4} \text{ e } a_{m-4} \\ a_{n-5} \text{ e } a_{m+5} \\ a_{n-6} \text{ e } a_{m+6} \\ a_{n+k} \text{ e } a_{m-k} \\ a_{n-k} \text{ e } a_{m+k} \end{cases}$$

CONVERGÊNCIA

Seja a seqüência (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$, definida pela função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $n \mapsto y = a_n$

Dizemos que:

6. **Seqüência convergente:**

A seqüência (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$, é **convergente** se e somente se existir um número real a do qual se aproximam os valores de a_n quando se faz **n** tender a infinito.

Indica-se: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ e lê-se: **"limite de a_n quando n tende a infinito é igual a a".**

Assim:

a) Seja a seqüência onde $a_n = \dfrac{3n}{n+1}$. Quando **n** tende a ∞, o valor do quociente $\dfrac{3n}{n+1}$ é aproximadamente igual ao valor de $\dfrac{3n}{n}$ e podemos escrever:

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{3n}{n+1} \cong \frac{3n}{n} = 3$$

Portanto, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{n+1} = \frac{3n}{n} = 3$ e a seqüência é convergente.

b) Seja a seqüência onde $a_n = \frac{3n-2}{4n}$. Quando **n** tende a ∞, o valor de $\frac{3n-2}{4n}$ é aproximadamente igual ao valor de $\frac{3n}{4n}$ e podemos escrever:

$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{3n-2}{4n} \cong \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

Portanto, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n-2}{4n} = \frac{3}{4}$ e a seqüência é convergente.

7. **Seqüência divergente:**

Na seqüência (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$, se os valores de $\mathbf{a_n}$ se tornam "infinitamente grandes" ou se tornam "infinitamente pequenos" quando **n** tende a infinito, então essa seqüência é **divergente**.

Indica-se: $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ e lê-se: **"limite de a_n quando** n **tende a infinito igual a infinito".**

ou $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ e lê-se: **"limite de a_n quando** n **tende a infinito igual a menos infinito".**

Assim:

a) Seja a seqüência onde $a_n = 3n + 4$. Quando $n \to \infty$ podemos dizer que $3n + 4$ tende a infinito pois o valor de $3n$ tende a infinito.

Portanto, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} 3n + 4 = \infty$ e a seqüência é divergente.

b) Seja a seqüência onde $a_n = -\frac{5n^2}{n+1}$. Quando $n \to \infty$, podemos escrever $-\frac{5n^2}{n+1} \cong -\frac{5n^2}{n} = -5n$ e o valor de $-5n$ tende a menos infinito.

Portanto, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} -\frac{5n^2}{n+1} = -\infty$ e a seqüência é divergente.

8. Verifique se são convergentes ou se são divergentes as seqüências onde:

a) $a_n = \frac{3n^3}{n^2+1}$

Quando $n \to \infty$, você pode escrever $\frac{3n^3}{n^2+1} \cong \frac{3n^3}{n^2} =$ ....$3n$.... e o valor de $3n$ tende a ....infinito.....

Portanto, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^3}{n^2+1} =$ ....∞.... e a seqüência é ....divergente.... .

b) $a_n = \frac{2n^2+1}{4n^2-1}$

Quando $n \to \infty$, você pode escrever $\frac{2n^2+1}{4n^2-1} \cong$ ....$\frac{2n^2}{4n^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$....

Portanto, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2+1}{4n^2-1} =$ ....$\frac{1}{2}$.... e a seqüência é ....convergente.... .

c) $a_n = \frac{n^2+n}{3n^2-1}$

Quando $n \to \infty$, você pode escrever $\frac{n^2+n}{3n^2-1} \cong \frac{n^2}{3n^2} =$ ....$\frac{1}{3}$....

Portanto, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+n}{3n^2-1} =$ ....$\frac{1}{3}$.... e a seqüência é ....convergente.... .

d) $a_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n - 3}$

Quando $n \to \infty$, você pode escrever $\dfrac{n^2 + n + 1}{2n - 3} \cong \dfrac{n^2}{2n} = \dfrac{n}{2}$ e o valor de $\dfrac{n}{2}$ tende a infinito.

Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + n + 1}{2n - 3} = \infty$ e a seqüência é divergente.

Exercícios a resolver: item 6, pág. 16.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Considere a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$
$n \mapsto y = a_n$, onde $a_n = 2n + 1$

e determine:

a) O número real que f faz corresponder ao natural n = 1.
b) O número real que f faz corresponder ao natural n = 2.
c) O número real que f faz corresponder ao natural n = 3.
d) O número real que f faz corresponder ao natural n = 4.
e) O domínio e a imagem da função f.
f) A seqüência definida por f.
g) O 10º termo e o 35º termo da seqüência.

2) Determine o termo geral, o 15º termo e o 146º termo da seqüência (2, 3, 4, ..., n + 1, ...).

3) Determine o termo geral, o 20º termo e o 116º termo da seqüência (5, 8, 11, 14, ..., 2 + 3n, ...).

4) Escreva a seqüência cujo termo geral é dado por:

a) $a_n = 3 + 2n$

b) $a_n = -5 + n$

c) $a_n = 2^n$

d) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

e) $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$

f) $a_n = (-1)^n$

g) $a_n = n^2$

h) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

i) $a_n = 5(-2)^{n-1}$

j) $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-2}$

5) Escreva a seqüência definida pela lei de recorrência:

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3 + a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 4 + a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = \frac{-}{2} \\ a_n = a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_n = -\frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = -5 + 2 \cdot a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = \dfrac{3 + a_{n-1}}{6}, n \geqslant 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = (\frac{1}{2})^{n-1} \cdot a_{n-1}, n \geqslant 2 \end{cases}$

6) Classifique as seqüências em convergentes e divergentes, calculando o limite do termo geral dado por:

a) $a_n = 2^n$

b) $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$

c) $a_n = -2 + 3n$

d) $a_n = \dfrac{1}{n}$

e) $a_n = \dfrac{3n + 1}{5n}$

f) $a_n = -\dfrac{2n^3}{n^2 + 1}$

g) $a_n = \dfrac{3n^2}{n^3 + 1}$

h) $a_n = \dfrac{10n^3 - n}{n + 3}$

i) $a_n = \dfrac{2n - 5}{n^2 + n}$

j) $a_n = \dfrac{n^3 + 2n - 1}{3n^3 - 5}$

RESPOSTAS

1) a) 3

b) 5

c) 7

d) 9

e) $D = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$ e $Im = \{3, 5, 7, 9, 11, ...\}$

f) (3, 5, 7, 9, ...)

g) $a_{10} = 21$; $a_{35} = 71$

2) $a_n = n + 1$

$a_{15} = 16$

$a_{146} = 147$

3) $a_n = 2 + 3n$

$a_{20} = 62$

$a_{116} = 350$

4) a) (5, 7, 9, 11, ...)

b) (−4, −3, −2, −1, ...)

c) (2, 4, 8, 16, ...)

d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$

e) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...)$

f) (−1, 1, −1, 1, ...)

g) (1, 4, 9, 16, ...)

h) (3, 6, 12, 24, ...)

i) (5, −10, 20, −40, ...)

j) $(-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...)$

5) a) (2, 5, 8, 11, ...)

b) (−3, 1, 5, 9, ...)

c) (3, 6, 12, ...)

d) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...)$

e) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ...)$

f) $(-4, 2, -1, \frac{1}{2}, ...)$

g) (2, −1, −7, −19, ...)

h) $(-3, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, ...)$

i) (3, −3, −3, 3, 3, ...)

j) $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{64}, ...)$

6) a) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, divergente

b) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$, convergente

c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, divergente

d) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, convergente

e) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{5}$, convergente

f) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$, divergente

g) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, convergente

h) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, divergente

i) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, convergente

j) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$, convergente

Seqüências Aritméticas

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) esteja apto a reconhecer as seqüências aritméticas.
b) conheça as propriedades de uma seqüência aritmética.
c) adquira as técnicas de cálculo com seqüências aritméticas.

SEQÜÊNCIA ARITMÉTICA

9. **Definição:** toda seqüência onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante dada é chamada **seqüência aritmética** ou **progressão aritmética (P.A.)**.

Assim:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$$

define uma **progressão aritmética**, onde o primeiro termo é **a** e **r** é a constante chamada **razão** da P.A.

10. **Aplicação:**

1º) Considere a seqüência $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots, a_n, \ldots)$ e assinale as afirmações corretas:

a. (X) O primeiro termo da seqüência é 1.
b. ( ) O segundo termo da seqüência é 2.
c. (X) O segundo termo da seqüência é 3.
d. (X) $a_2 = a_1 + 2$
e. (X) O terceiro termo da seqüência é 5.
f. ( ) $a_3 = a_1 + 2$
g. (X) $a_3 = a_2 + 2$
h. (X) $a_4 = 7$
i. ( ) O quarto termo é igual ao segundo termo mais 2.
j. (X) O quarto termo é igual ao terceiro termo mais 2.
l. (X) $a_4 = a_3 + 2$
m. (X) $a_5 = a_4 + 2$

n. (X) O quinto termo é igual ao quarto termo mais 2.

o. (X) $a_n = a_{n-1} + 2$, com $n \geqslant 2$

p. ( ) A constante é $r = 3$.

q. (X) A constante é $r = 2$.

r. (X) Na seqüência $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots, a_n, \ldots)$, cada termo a partir do segundo é igual à soma do anterior com a constante 2.

s. (X) A seqüência $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.A. onde o primeiro termo é 1 e a razão é 2.

t. (X) A seqüência $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots, a_n, \ldots)$ é definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$$

2º) Considere a seqüência $(-5, -2, 1, 4, 7, \ldots, a_n, \ldots)$ e complete:

a) O primeiro termo da seqüência é a_1 = ...-5... .

b) O segundo termo da seqüência é a_2 = ...-2... e $a_2 = a_1 + 3$ = ...-5... + 3 = ...-2... .

c) O terceiro termo da seqüência é a_3 = ...1... e $a_3 = a_2 + 3$ = ...-2... + 3 = ...1... .

d) O quarto termo da seqüência é a_4 = ...4... e $a_4 = a_3 + 3$ = ...1... + 3 = ...4... .

e) O quinto termo da seqüência é a_5 = ...7... e $a_5 = a_4$ + ...3... = ...4... + ...3... = ...7... .

f) O sexto termo da seqüência é a_6 = ...10... e $a_6 = a_5$ + ...3... = ...7... + ...3... = ...10... .

g) A seqüência $(-5, -2, 1, 4, 7, \ldots)$ é uma ...P.A... onde a_1 = ...-5... e r = ...3... .

h) A seqüência fica definida por $\begin{cases} a_1 = \text{...-5...} \\ a_n = \text{...}a_{n-1}+3\text{...}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

3º) Considere a seqüência definida por $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = a_{n-1} + 5, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ e complete:

a) A seqüência é (6, 11, ...16, 21, 26, ...)... .

b) Para n = 2, $a_2 = a_1$ + ...5... .

c) Para n = 3, $a_3 = a_2$ + ...5... = a_1 + ...2... · 5.

d) Para n = 4, $a_4 = a_3$ + ...5... = a_1 + ...3... · 5.

e) Para n = 5, $a_5 = a_4$ + ...5... = a_1 + ...4... · 5.

f) Para n = 6, $a_6 = a_5$ + ...5... = a_1 + ...5... · 5.

g) Para n, $a_n = a_{n-1}$ + ...5... = a_1 + (...n-1...) · 5.

h) A seqüência (6, 11, 16, 21, ...) é uma ...P.A... onde a_1 = ...6... e r = ...5... .

RELAÇÃO ENTRE O n-ÉSIMO E O PRIMEIRO TERMO DE UMA P.A.

11. A relação entre o **n-ésimo** e o primeiro termo de uma P.A. é dada por

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$$

isto é, o **n-ésimo** termo de uma P.A. é igual ao 1º termo mais (n – 1) vezes a razão r.

Assim, considere a P.A. onde o 1º termo é a_1 e a razão é r e complete:

a) Para n = 1, você tem o 1º termo, que é ...a_1... .

b) Para n = 2, você tem o 2º termo, que é a_2 = ...a_1... + r.

c) Para n = 3, você tem o 3º termo, que é $a_3 = a_1$ + ...2... · r.

d) Para n = 4, você tem o 4º termo, que é $a_4 = a_1$ + ...3... · r.

e) Para n = 5, você tem o 5º termo, que é $a_5 = a_1$ + ...4... · r.

f) Para n = 20, você tem o 20º termo, que é $a_{20} = a_1$ + ...19... · r.

g) Para n = 35, você tem o 35º termo, que é $a_{35} = a_1$ + ...34... · r.

h) Para n qualquer, você tem o **n-ésimo** termo, que é $a_n = a_1$ + (...n-1...) · r.

Então, a relação $a_n = a_1 + (n - 1)r$ nos permite calcular um termo qualquer da P.A. sem escrever todos os termos anteriores a ele.

12. **Aplicação:**

1º) Seja a P.A. onde o 1º termo é 3 e a razão é 9.

Calcule:

a) O 5º termo da P.A.
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $a_5 = a_1 +$ 4 $\cdot r =$ 3 $+ 4 \cdot$ 9 $=$ 39.

b) O 11º termo da P.A.
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $a_{11} = a_1 +$ 10 $\cdot r =$ $3 + 10 \cdot 9 = 93$.

c) O 20º termo da P.A.
Como $a_n =$ $a_1 + (n-1)r$, $a_{20} =$ $a_1 + 19 \cdot r = 3 + 19 \cdot 9 = 174$

d) O 24º termo da P.A.
Como $a_n =$ $a_1 + (n-1)r$, $a_{24} =$ $a_1 + 23 \cdot r = 3 + 23 \cdot 9 = 210$

2º) Seja a P.A. onde o 1º termo é 5 e a razão é -2. Calcule:

a) O 3º termo da P.A.
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $a_3 =$ $a_1 + 2 \cdot r = 5 + 2(-2) = 1$

b) O 5º termo da P.A.
Como $a_n =$ $a_1 + (n-1)r$, $a_5 =$ $5 + 4 \cdot (-2) = -3$

c) A P.A. é (5, 3, 1, -1, -3, ...)

d) O 32º termo da P.A.
Como $a_n =$ $a_1 + (n-1)r$, $a_{32} =$ $5 + 31(-2) = -57$

e) O 101º termo da P.A.
Como $a_n =$ $a_1 + (n-1)r$, $a_{101} =$ $5 + 100(-2) = -195$

3º) Calcule o 1º termo de uma P.A. e escreva a P.A., sabendo que o 8º termo é 23 e a razão é 3.
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $a_8 = a_1 +$ 7 $\cdot r$ e substituindo a_8 por 23 e r por 3, vem:

$23 = a_1 + 7 \cdot 3$

$23 = a_1 + 21$

$a_1 = 23 - 21 = 2$

A P.A. é (2, 5, 8, 11, ...)

4º) Calcule a razão de uma P.A. e escreva a P.A., sabendo que o seu 1º termo é -14 e o 7º termo é 10.
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $a_7 = a_1 +$ 6 $\cdot r$ e substituindo o valor de a_1 e a_7 vem:

$10 = -14 + 6 \cdot r$

$6r = 10 + 14$

$r = 4$

A P.A. é (-14, -10, -6, -2, 2, ...)

5º) Numa P.A. o seu 1º termo é 9, a razão é -4 e um de seus termos é igual a -39. Calcule a posição deste termo na P.A.
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $-39 =$ 9 $+ (n - 1) \cdot ($ -4 $)$ e resolvendo essa equação em n, vem:

$-39 = 9 - 4n + 4$

$4n = 13 + 39$

$4n = 52$

$n = 13$

Portanto, -39 é o 13º termo da P.A.

6º) Calcule o 20º termo de uma P.A., sabendo que o seu 4º termo é 5 e a razão é 2.

Para calcular a_{20}, você precisa do valor de a_1 que será calculado a partir do a_4. Faça então:

$a_4 = a_1 + 3 \cdot r \Rightarrow 5 = a_1 + 3 \cdot 2$

$5 = a_1 + 6$

$a_1 = -1$

$a_{20} = a_1 + 19 \cdot r \Rightarrow a_{20} = -1 + 19 \cdot 2 = 37$

$a_{20} = 37$

Portanto, o vigésimo termo da P.A. é 37.

7º) Sabendo que $2x - 3$, $3x - 4$ e $2x + 5$ são termos consecutivos de uma P.A., calcule x e escreva esses termos.

$3x - 4 = 2x - 3 + r \Rightarrow r = x - 1$

e

$2x + 5 = 3x - 4 + r \Rightarrow r = -x + 9$

$\Rightarrow x - 1 = -x + 9 \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$

Os termos são 7, 11 e 15.

Exercícios a resolver: itens 1 a 27, pág. 23.

13. Propriedades de uma P.A.

1ª) Na P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+k}, \ldots, a_{m-k}, \ldots, a_m, \ldots)$, onde o 1º termo é a_1 e a razão é r, vale a relação:

$$a_n + a_m = a_{n+k} + a_{m-k}$$

ou seja, a soma de dois termos quaisquer de uma P.A. é igual à soma de dois termos eqüidistantes a eles.

Em particular:

a) $a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k}$

b) $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, isto é, cada termo de uma P.A. é a média aritmética de dois termos quaisquer eqüidistantes a ele.

De fato: $a_{n-k} + a_{n+k} = a_n + a_n = 2a_n \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$

c) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, onde a_{n-1}, a_n e a_{n+1} são três termos consecutivos.

2ª) Uma P.A. com a razão diferente de zero é sempre divergente, isto é, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$

De fato: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a_1 + (n-1)r| = \infty$

SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

14. Na P.A. $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ a soma dos n primeiros termos é dada por

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

De fato: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \ldots + a_{n-1} + a_n$ ou

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + \ldots + a_2 + a_1$

e somando membro a membro, vem: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

(cada parêntese $\downarrow$ $a_1 + a_n$)

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

15. Aplicação:

1º) Calcule a soma dos 10 primeiros termos de uma P.A., onde o 1º termo é 2 e o 10º termo é 47.

Como $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, $S_{10} = \frac{10.(2+47)}{2} = 245$

2º) Calcule a soma dos 12 primeiros termos de uma P.A., onde $a_1 = -4$ e $r = 5$.

Para calcular S_{12}, você precisa calcular antes a_{12}.

Assim: $a_{12} = a_1 + 11.r = -4 + 55 = 51$

$S_{12} = \frac{12(-4+51)}{2} = 282$

3º) Calcule a soma dos 8 primeiros termos de uma P.A. cujo oitavo termo é 12 e a razão é 5.

Para isso complete:

$a_8 = a_1 + 7.r \iff 12 = a_1 + 35 \iff a_1 = -35 + 12 = -23$

$S_8 = \frac{8(-23+12)}{2} = -44$

4º) Escreva a P.A., sabendo que a soma dos vinte primeiros termos é 380 e que o vigésimo termo é 57.

Para isso complete:

$S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} \iff 380 = \frac{20}{2}(a_1 + 57) \iff a_1 = \frac{-570+380}{10} =$

$a_1 = \frac{-190}{10} = -19$

$a_{20} = a_1 + 19.r \iff 57 = -19 + 19 \cdot r \iff r = \frac{57+19}{19} = 4$

A P.A. é $(-19, -15, -11, -7, -3, \ldots)$

Exercícios a resolver: itens 28 a 40, págs. 23 e 24.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Em cada seqüência aritmética abaixo, calcule:

a) a razão de (2, 5, 8, . . .).

b) a razão de (−10, −8, −6, . . .).

c) a razão de $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots)$.

d) o 23º termo de (13, 9, 5, . . .).

e) o 34º termo de (5, −2, −9, . . .).

f) o 151º termo de $(8, \frac{15}{2}, 7, \ldots)$.

g) o 100º termo de (−3, 1, 5, . . .).

h) o 45º termo de (3n, 6n, 9n, . . .).

2) Conhecendo o valor de a_n, calcule a sua posição em cada uma das seqüências aritméticas abaixo:

a) $a_n = 72$ na P.A. (2, 7, 12, . . .).

b) $a_n = \frac{63}{2}$ na P.A. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots)$.

c) $a_n = -172$ na P.A. (−1, −4, −7, . . .).

d) $a_n = -393$ na P.A. (3, −1, −5, . . .).

e) $a_n = 20n - 19$ na P.A. (n, 2n − 1, 3n − 2, . . .).

3) Calcule o 25º termo de uma P.A. cujo 1º termo é 12 e cuja razão é −5.

4) Calcule o 43º termo de uma P.A., sabendo que $a_1 = -20$ e que $a_n = a_{n-1} + 7$.

5) Calcule o 13º termo de uma P.A., sabendo que $a_1 = 48$ e que $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

6) Calcule a razão e escreva a P.A., sabendo que o seu 1º termo é −48 e o 15º termo é −90.

7) Escreva uma P.A. cujo 1º termo é 4 e o 20º termo é −15.

8) Escreva uma P.A. onde $a_1 = -25$ e $a_{10} = 11$.

9) Calcule a posição do termo $a_n = -400$ numa P.A. onde o 1º termo é 65 e a razão é −15.

10) Numa P.A., sendo $a_1 = -10$, $r = -8$ e $a_n = -362$, calcule o valor de n.

11) Numa P.A., sendo $a_1 = 240$, $r = -7$ e $a_n = 2$, calcule o valor de n.

12) Calcule o 1º termo e o 10º termo de uma P.A. cuja razão é 3 e o 15º termo é 44.

13) Calcule o 8º termo de uma P.A. cuja razão é 8 e o 20º termo é 155.

14) Calcule o 10º termo de uma P.A., onde $r = \frac{1}{2}$ e $a_{43} = -13$.

15) Calcule o 20º termo de uma P.A. cujo 1º termo é 2 e o 15º termo é −152.

16) Calcule o valor de x, sabendo que 2x + 7, 3x e 5x − 11 são três termos consecutivos de uma P.A.

17) Calcule o valor de x, sabendo que $\frac{x}{4}$, $\frac{2x}{3}$ e x − 1 são três termos consecutivos de uma P.A.

18) Escreva três termos da forma −4x, 10x e 6x + 9, sabendo que são três termos consecutivos de uma P.A.

19) Escreva três termos da forma 3x, x e $x + \frac{2}{5}$, sabendo que são três termos consecutivos de uma P.A.

20) Escreva uma P.A. onde os três primeiros termos são da forma $\frac{x - 10}{5}$, $\frac{x - 5}{5}$ e $\frac{6}{5}$.

21) Escreva uma P.A. onde os três primeiros termos são da forma $\frac{3 - x}{2}$, 2x e x + 2.

22) Determine as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo, sabendo que essas medidas são três termos consecutivos de uma P.A.

23) Determine o valor de x, de modo que x^2, $(x - 1)^2$ e $(x - 5)^2$ sejam termos consecutivos de uma P.A.

24) Escreva uma P.A. onde a soma de seus três primeiros termos é 3 e o produto deles é $\frac{3}{4}$.

25) Calcule as medidas dos lados de um triângulo retângulo, sabendo que o seu perímetro é 12 cm e que essas medidas são os três primeiros termos de uma P.A.

26) Escreva uma P.A. onde a soma do 2º termo com o 7º termo é −10 e a soma do 4º termo com o 9º termo é 6.

27) Escreva uma P.A. onde a soma do 4º termo com o 8º termo é 20 e o 31º termo é o dobro do 16º termo.

28) Calcule a soma dos 35 primeiros termos de uma P.A. onde o 1º termo é −12 e a razão é 5.

29) Calcule a soma dos 20 primeiros termos de uma P.A. onde o 1º termo é −7 e a razão é 3.

30) Calcule a soma dos 49 primeiros termos de uma P.A. onde o 1º termo é $37\sqrt{2}$ e a razão é $-5\sqrt{2}$.

31) Calcule a soma dos 100 primeiros termos de uma P.A. onde $r = 1$ e $a_{100} = 204$.

32) Calcule a soma dos 15 primeiros termos da P.A. (5, 2, −1, −4, . . .).

33) Calcule a soma dos 31 primeiros termos da P.A. (−8, −3, 2, . . .).

34) Calcule a soma dos 20 primeiros termos da P.A. $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots)$.

35) Calcule a soma dos 30 primeiros números ímpares positivos.

36) Calcule a soma dos 55 primeiros termos de uma P.A., sabendo que o 6º termo é igual a −3 e a razão é 5.

37) Escreva uma P.A., sabendo que a soma dos seus 8 primeiros termos é –20 e a razão é –3.

38) Calcule o 7º termo de uma P.A., sabendo que $a_{10} = \frac{47}{8}$ e $a_4 = \frac{17}{8}$.

39) Calcule o 32º termo de uma P.A., sabendo que $a_{31} = -42$ e $a_{33} = -30$.

40) Calcule o 15º termo de uma P.A., sabendo que $a_3 = \frac{1}{4}$ e $a_{27} = \frac{59}{4}$.

RESPOSTAS

1) a) $r = 3$
b) $r = 2$
c) $r = \frac{1}{3}$
d) $a_{23} = -75$
e) $a_{34} = -226$
f) $a_{151} = -67$
g) $a_{100} = 393$
h) $a_{45} = 135n$

2) a) $n = 15$, 15º termo
b) $n = 32$, 32º termo
c) $n = 58$, 58º termo
d) $n = 100$, 100º termo
e) $n = 20$, 20º termo

3) $a_{25} = -108$

4) $a_{43} = 274$

5) $a_{13} = 54$

6) $r = -3$; (–48, –51, –54, . . .)

7) (4, 3, 2, 1, 0, . . .)

8) (–25, –21, –17, . . .)

9) $n = 32$, 32º termo

10) $n = 45$

11) $n = 35$

12) $a_1 = 2$; $a_{10} = 29$

13) $a_8 = 59$

14) $a_{10} = -\frac{59}{2}$

15) $a_{20} = -207$

16) $x = 4$

17) $x = -12$

18) –2, 5, 12

19) $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$

20) $(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \ldots)$

21) (1, 2, 3, 4, . . .)

22) 30º, 60º e 90º

23) $x = \frac{23}{6}$

24) $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots)$ para $r = \frac{1}{2}$ e $(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \ldots)$ para $r = -\frac{1}{2}$

25) 3 cm, 4 cm e 5 cm

26) (–19, –15, –11, –7, . . .)

27) (0, 2, 4, 6, . . .)

28) $S_{35} = 2555$

29) $S_{20} = 430$

30) $S_{49} = -4067\sqrt{2}$

31) $S_{100} = 15450$

32) $S_{15} = -240$

33) $S_{31} = 2077$

34) $S_{20} = 80$

35) $S_{30} = 900$

36) $S_{55} = 5885$

37) (8, 5, 2, –1, . . .)

38) $a_7 = 4$

39) $a_{32} = -36$

40) $a_{15} = \frac{15}{2}$

SEQÜÊNCIA B

1) Calcule a soma dos 20 primeiros termos de uma P.A., sabendo que o 5º termo é 17 e o 10º termo é 32.

$r = 3$; $a_1 = 5$; $a_{20} = 62$; $S_{20} = 670$

2) Calcule o 15º termo de uma P.A., sabendo que a soma dos 4 primeiros termos é –78 e que o 11º termo é igual à soma do 1º com o 6º termo.

$r = -3$; $a_1 = -15$; $a_{15} = -57$

3) Escreva uma P.A., sabendo que a soma dos seus 10 primeiros termos é 55 e a soma dos seus 6 primeiros termos é –3.

$r = 3$; $a_1 = -8$; (–8, –5, –2, 1, 4, ...)

4) Calcule a soma dos 16 primeiros termos da P.A. $(\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \frac{n+3}{n}, \ldots)$.

$r = \frac{1}{n}$; $a_{16} = \frac{n+16}{n}$; $S_{16} = \frac{16n+136}{n}$

5) Calcule a soma dos múltiplos de 6 não negativos menores que 100.

$a_1 = 0$; $r = 6$; $a_n = 96$; $n = 17$; $S_{17} = 816$

6) Calcule a soma dos números ímpares compreendidos entre 100 e 500.

$a_1 = 101$; $r = 2$; $a_n = 499$; $n = 200$; $S_{200} = 60000$

7) Calcule a soma dos múltiplos positivos de 9 formados por 3 algarismos.

$a_1 = 108$; $r = 9$; $a_n = 999$; $n = 100$; $S_{100} = 55350$

8) Calcule o número de múltiplos de 15 compreendidos entre 100 e 3500.

$a_1 = 105$; $a_n = 3495$; $n = 227$ números

9) Quantos são os números de 3 algarismos que não são divisíveis por 3?
(**Sugestão:** dos 900 números de 3 algarismos subtraia o total de números divisíveis por 3.)

300 números divisíveis por 3 e 600 números não divisíveis por 3

10) Determine a expressão da soma dos n primeiros números ímpares naturais.

$a_1 = 1$; $r = 2$; $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$; $S_n = n^2$

11) Escreva uma P.A., sabendo que o produto do 1º termo pelo 4º termo é 90 e o produto do 2º termo pelo 3º termo é 108.

$(-15, -12, -9, -6, \ldots)$, ou $(6, 9, 12, 15, \ldots)$ para $r = 3$ e $(15, 12, 9, \ldots)$ ou $(-6, -9, -12, \ldots)$ para $r = -3$

12) Calcule o termo geral de uma P.A. cujo primeiro termo é 5 e cuja soma dos n primeiros termos é $n^2 + 4n$.

$a_n = 2n + 3$

Seqüências Geométricas

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) esteja apto a reconhecer seqüências geométricas.
b) conheça as propriedades de uma seqüência geométrica.
c) adquira as técnicas de cálculo com seqüências geométricas.

SEQÜÊNCIA GEOMÉTRICA

16. **Definição:** toda seqüência, onde cada termo a partir do segundo é o produto do termo anterior por uma constante dada diferente de zero, é chamada **seqüência geométrica** ou **progressão geométrica (P.G.)**.

Assim:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ com } n \geqslant 2 \text{ e } q \neq 0 \end{cases}$$

define uma **progressão geométrica**, onde o primeiro termo é a e q é a constante chamada **razão** da P.G.

17. **Aplicação:**

1º) Considere a seqüência (2, 6, 18, 54, 162, ...) e assinale as afirmações corretas:

a. (X) O primeiro termo da seqüência é 2.
b. ( ) O segundo termo da seqüência é 5.
c. (X) O segundo termo da seqüência é 6.
d. (X) $a_2 = a_1 \cdot 3$
e. (X) O terceiro termo da seqüência é 18.
f. ( ) $a_3 = a_1 \cdot 3$
g. (X) $a_3 = a_2 \cdot 3$
h. (X) $a_4 = 54$
i. (X) $a_4 = a_3 \cdot 3$
j. ( ) $a_4 = a_1 \cdot 3$
l. (X) $a_5 = a_4 \cdot 3$
m. (X) $a_n = a_{n-1} \cdot 3$

n. (X) A constante é igual a 3.

o. (X) Na seqüência (2, 6, 18, 54, 162, ..., a_n, ...), cada termo a partir do segundo é igual ao produto do, termo anterior pela constante 3

p. ( ) A seqüência (2, 6, 18, 54, 162, ..., a_n, ...) é uma P.G. onde o primeiro termo é 2 e a razão é 4.

q. (X) A seqüência (2, 6, 18, 54, 162, ..., a_n, ...) é uma P.G. onde o primeiro termo é 2 e a razão é 3.

r. (X) A seqüência (2, 6, 18, 54, ..., a_n, ...) é definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 3, \text{ com } n \geqslant 2. \end{cases}$$

2º) Considere a seqüência (3, -6, 12, -24, 48, -96, ...) e complete:

a) O primeiro termo da seqüência é a_1 = 3

b) O segundo termo da seqüência é $a_2 = -6$ e $a_2 = a_1 \cdot (-2) = 3 \cdot (-2) = -6$.

c) O terceiro termo da seqüência é $a_3 = 12$ e $a_3 = a_2 \cdot (-2) = -6 \cdot (-2) = 12$.

d) O quarto termo da seqüência é $a_4 = -24$ e $a_4 = a_3 \cdot (-2) = 12 \cdot (-2) = -24$

e) O quinto termo da seqüência é $a_5 = 48$ e $a_5 = a_4 \cdot (-2) = -24 \cdot (-2) = 48$.

f) O sexto termo da seqüência é $a_6 = -96$ e $a_6 = a_5 \cdot (-2) = 48 \cdot (-2) = -96$.

g) A seqüência (3, -6, 12, -24, 48, -96, ...) é uma P.G. onde o primeiro termo é a_1 = 3 e q = -2.

3º) Considere a seqüência definida por $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ e complete:

a) A seqüência é (8, 4, $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$).

b) Para n = 2, $a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{2} = 4$

c) Para n = 3, $a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{2} = a_1 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$

d) Para n = 4, $a_4 = a_3 \cdot \frac{1}{2} = a_1 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$.

e) Para n = 5, $a_5 = a_4 \cdot \frac{1}{2} = a_1 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

f) Para n = 6, $a_6 = a_5 \cdot \frac{1}{2} = a_1 \cdot (\frac{1}{2})^5 = 8 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$

g) Para n, $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = a_1 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$

h) A seqüência (8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ...) é uma P.G. onde a_1 = 8 e q = $\frac{1}{2}$

RELAÇÃO ENTRE O n-ÉSIMO E O PRIMEIRO TERMO DE UMA P.G.

18. A relação entre o **n-ésimo** e o primeiro termo de uma P.G. é dada por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

isto é, o **n-ésimo** termo de uma P.G. é igual ao produto do 1º termo pela razão elevada ao expoente n - 1

Assim, considere a P.G., onde o 1º termo é a_1 e a razão é q, e complete:

a) Para n = 1, você tem o 1º termo que é a_1.

b) Para n = 2, você tem o 2º termo que é $a_2 = a_1 \cdot q$.

c) Para n = 3, você tem o 3º termo que é $a_3 = a_1 \cdot q^2$.

d) Para $n = 4$, você tem o 4º termo que é $a_4 = a_1 \cdot q^{3}$.

e) Para $n = 5$, você tem o 5º termo que é $a_5 = a_1 \cdot q^{4}$.

f) Para $n = 20$, você tem o 20º termo que é $a_{20} = a_1 \cdot q^{19}$.

g) Para $n = 35$, você tem o 35º termo que é $a_{35} = a_1 \cdot q^{34}$.

h) Para n qualquer, você tem o n-ésimo termo que é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Então, a relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ nos permite calcular um termo qualquer da P.G. sem escrever todos os termos anteriores a ele.

19. Aplicação:

1º) Seja a P.G. onde o 1º termo é 3 e a razão é 2.

Calcule:

a) O 6º termo da P.G.
Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_6 = a_1 \cdot q^{5} = 3 \cdot 2^5 = 96$

b) O 8º termo da P.G.
Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_8 = a_1 \cdot q^{7} = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384$

c) O 11º termo da P.G.
Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = 3 \cdot 2^{10} = 3 \times 1024 = 3072$

2º) Calcule o 1º termo de uma P.G. e escreva a P.G., sabendo que a_5 é -80 e a razão é 2.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_5 = a_1 \cdot q^{4}$, substituindo a_5 por -80 e q por 2 vem:

$-80 = a_1 \cdot 2^4 \Rightarrow a_1 = \frac{-80}{16} = -5$

A P.G. é $(-5, -10, -20, -40, \ldots)$

3º) Calcule a razão de uma P.G. e escreva a P.G., sabendo que o seu 1º termo é $\frac{1}{2}$ e a_8 é $\frac{1}{4374}$.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_8 = a_1 \cdot q^{7}$, substituindo a_1 e a_8 pelos valores dados vem:

$\frac{1}{4374} = \frac{1}{2} \cdot q^{7} \iff q^7 = \frac{1}{4374} \cdot 2 = \frac{1}{2187} \iff q^7 = (\frac{1}{3})^7 \iff q = \frac{1}{3}$

A P.G. é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \ldots)$

4º) Calcule a razão de uma P.G. e escreva a P.G., sabendo que a_5 é 405 e o 1º termo é 5.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_5 = a_1 \cdot q^{4}$, substituindo a_5 e a_1 pelos valores dados vem:

$405 = 5 \cdot q^{4} \iff q^4 = \frac{405}{5} = 81 \iff q^4 = 81 \iff q^4 = (\pm 3)^4$

Portanto, $q = 3$ ou $q = -3$

E, para $q = 3$, a P.G. é $(5, 15, 45, 135, 405, \ldots)$
para $q = -3$, a P.G. é $(5, -15, 45, -135, 405, \ldots)$

5º) Calcule o valor n numa P.G. onde $a_1 = 8$, $a_n = 1944$ e a razão é 3.

Substituindo os valores dados, na relação $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem:

$1944 = 8 \cdot 3^{n-1} \iff 243 = 3^{n-1} \iff 3^5 = 3^{n-1} \iff 5 = n - 1 \iff n = 6$

6º) Calcule o 10º termo de uma P.G., sabendo que o 7º termo é 192 e a razão é -2.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_7 = a_1 \cdot q^{6}$ e substituindo pelos valores dados vem:

$192 = a_1 \cdot (-2)^6 \iff a_1 = \frac{192}{64} = 3$

Logo, $a_{10} = a_1 \cdot q^{9} \iff a_{10} = 3 \cdot (-2)^9 = 3 \cdot (-512) = -1536$

7º) Calcule a razão de uma P.G. onde o 6º termo é 36 e o 4º termo é 81.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_6 = a_1 \cdot q^{5}$ e $a_4 = a_1 \cdot q^{3}$, substituindo pelos valores dados temos: $36 = a_1 \cdot q^{5}$ e $81 = a_1 \cdot q^{3}$ e, dividindo membro a membro,

vem: $\frac{36}{81} = \frac{a_1 q^5}{a_1 q^3} \iff \frac{4}{9} = q^2 \iff q = \pm \frac{2}{3}$

Você obteve $q = \frac{2}{3}$ ou $q = -\frac{2}{3}$

8º) Sabendo que $2x - 7$, $x + 1$, $x + 7$ são três termos consecutivos de uma P.G., calcule **x** e escreva esses termos.

Para isso complete:

$x + 1 = (2x - 7) \cdot q \Rightarrow q = \frac{x+1}{2x-7}$

$x + 7 = (x + 1) \cdot q \Rightarrow q = \frac{x+7}{x+1}$

$\Longrightarrow \frac{x+1}{2x-7} = \frac{x+7}{x+1}$

e resolvendo essa equação vem: $x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 7x - 49$

$x^2 + 5x - 50 = 0 \Rightarrow x = -10$ ou $x = 5$

Você obteve $x = -10$ ou $x = 5$

Portanto, para $x = -10$ os termos são -27, -9, -3 e para $x = 5$, os termos são 3, 6, 12.

Exercícios a resolver: itens 1 a 20, págs. 32 e 33.

20. Propriedades de uma P.G.

1ª) Numa P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, a_{n+k}, \dots, a_{m-k}, \dots, a_m, \dots)$ onde o 1º termo é a_1 e a razão é q, vale a relação

$$a_n \cdot a_m = a_{n+k} \cdot a_{m-k}$$

isto é, o produto de dois termos é igual ao produto de dois outros termos eqüidistantes deles.

Em particular:

a) $a_1 \cdot a_n = a_{1+k} \cdot a_{n-k}$

b) $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$ e $|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$, isto é, cada termo em módulo é igual à média geométrica entre dois termos quaisquer eqüidistantes a ele.

c) $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, onde a_{n-1}, a_n e a_{n+1} são três termos consecutivos da P.G.

2ª) Uma P.G. onde $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$ é sempre convergente, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

De fato, quando $n \to \infty$, q^{n-1} tende a zero, pois q é um número decimal entre -1 e 1.

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = 0$

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G.

21. Soma dos n primeiros termos.

Numa P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, com $q \neq 1$, a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$.

De fato, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

e multiplicando ambos os membros por q vem:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n \cdot q$$

Portanto: $S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \iff S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$ com $q \neq 1$

22. Limite da soma dos termos de uma P.G. convergente.

O limite da soma dos termos de uma P.G. convergente é

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{a_1}{1-q}, \text{ com } -1 < q < 1 \text{ e } q \neq 0$$

De fato, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q} = \dfrac{a_1}{1-q}$ pois quando $n \to \infty$, $a_n \to 0$

23. Aplicação:

1º) Calcule a soma dos 6 primeiros termos de uma P.G. cujo primeiro termo é -20, a razão é $\dfrac{1}{2}$ e o 6º termo é $-\dfrac{5}{8}$.

Como $S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$, $S_6 = \dfrac{a_1 - a_6 \cdot q}{1 - q} = \dfrac{-20 - (-\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} =$

$= \dfrac{-20 + \frac{5}{16}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{315}{16}}{\frac{1}{2}} = -\dfrac{315}{8}$

2º) Calcule a soma dos 9 primeiros termos de uma P.G., sabendo que $a_1 = 6$ e $q = -2$.

Como $S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$, $S_9 = \dfrac{a_1 - a_9 \cdot q}{1 - q}$ e para calcular S_9 você precisa do valor de a_9

Assim: $a_9 = a_1 \cdot q^8 = 6 \cdot (-2)^8 = 6 \times 256 = 1536$

e $S_9 = \dfrac{6 - 1536 \cdot (-2)}{1 - (-2)} = \dfrac{6 + 3072}{1 + 2} = \dfrac{3078}{3} = 1026$

3º) Calcule o limite da soma dos termos da P.G. (-18, -6, -2, ...).

Como $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S = \dfrac{a_1}{1 - q}$, você precisa do valor da razão para calcular S.

Assim: $a_2 = a_1 \cdot q \iff -6 = -18 \cdot q \iff q = \dfrac{-6}{-18} = \dfrac{1}{3}$

e $S = \dfrac{-18}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{-18}{\frac{2}{3}} = -27$

4º) O limite da soma dos termos de uma P.G. é 4 e a razão é $-\dfrac{1}{8}$.

Calcule o 1º termo da P.G. e escreva a P.G.

$S = \dfrac{a_1}{1 - q} \iff 4 = \dfrac{a_1}{1 - (-\frac{1}{8})} \iff a_1 = \dfrac{9}{8} \cdot 4 = \dfrac{9}{2}$

A P.G. é $\left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{9}{16}, \dfrac{9}{128}, -\dfrac{9}{1024}, \ldots\right)$

5º) Escreva uma P.G. onde a soma dos 5 primeiros termos é 605 e a razão é 3.

Como $S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q}$, $S_5 = \dfrac{a_1 - a_5 \cdot q}{1 - q}$, para escrever a P.G., você precisa do 1º termo a_1.

Sabendo que $a_5 = a_1 \cdot q^4$,

vem: $605 = \dfrac{a_1 - a_1 \cdot q^4 \cdot q}{1 - q} \iff 605 = \dfrac{a_1 - a_1 \cdot 3^5}{1 - 3}$

$(-2) \cdot 605 = a_1 - a_1 \cdot 243$

$a_1 = \dfrac{1210}{242} = 5$

A P.G. é (5, 15, 45, ...)

PRODUTO DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.G.

24. Numa P.G. $(a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ o **produto dos n primeiros termos é dado em módulo por:**

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

De fato: $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 ... a_{n-1} \cdot a_n$

ou $P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} ... a_2 \cdot a_1$ e multiplicando membro a membro vem:

$$P_n^2 = \underbrace{(a_1 \cdot a_n)}_{a_1 \cdot a_n} \cdot \underbrace{(a_2 \cdot a_{n-1})}_{a_1 \cdot a_n} \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) ... \underbrace{(a_{n-1} \cdot a_2)}_{a_1 \cdot a_n} \cdot (a_n \cdot a_1)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \iff |P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

25. Aplicação:

1º) Calcule, em módulo, o produto dos 7 primeiros termos de uma P.G., onde o 1º termo é $-\frac{1}{64}$ e a razão é -4.

Como $|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$, $|P_7| = \sqrt{(\ a_1 \ \cdot a_7)^{7}}$ para calcular esse produto, você precisa do valor de a_7.

Assim: $a_7 = a_1 \cdot q^6 = -\frac{1}{64} \cdot (-4)^6 = -\frac{1}{4^3} \cdot 4^6 = -4^3 = -64$

e $|P_n| = \sqrt{\left[-\frac{1}{64} \cdot (-64)\right]^7} = \sqrt{1^7} = 1$

2º) Calcule, em módulo, o produto dos oito primeiros termos de uma P.G., onde o 1º termo é $\frac{27}{16}$ e a razão é $\frac{2}{3}$.

$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \Longrightarrow |P_8| = \sqrt{\left(\frac{27}{16} \cdot a_8\right)^8}$

$a_8 = a_1 \cdot q^7 = \frac{27}{16} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{3^3}{2^4} \cdot \frac{2^7}{3^7} = \frac{2^3}{3^4}$

$|P_8| = \sqrt{\left(\frac{3^3}{2^4} \cdot \frac{2^3}{3^4}\right)^8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2.3}\right)^8} = \left(\frac{1}{2.3}\right)^4 = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$

Exercícios a resolver: itens 21 a 35, pág. 33.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Dadas as seqüências geométricas abaixo, calcule:

a) a razão de $(1, 2, 4, 8, ...)$.

b) a razão de $(64, -32, 16, -8, ...)$.

c) a razão de $(-3, -6, -12, ...)$.

d) a razão de $(\frac{5}{27}, \frac{5}{9}, \frac{5}{3}, ...)$.

e) o 6º termo de $(-\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{9}, ...)$.

f) o 11º termo de $(1024, 512, 256, ...)$.

g) o 23º termo de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$.

h) o 8º termo de $(-72, -24, -8, ...)$.

i) o 6º termo de $(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{2}, ...)$.

j) o 7º termo de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, ...)$.

2) Calcule o 1º termo e escreva a P.G. cuja razão é 2 e cujo 9º termo é 512.

3) Escreva uma P.G. onde a razão é $-\frac{1}{3}$ e o 10º termo é $\frac{1}{243}$.

4) Escreva uma P.G. onde a razão é $\frac{1}{3}$ e o 8º termo é $-\frac{1}{27}$.

5) Calcule a ordem do termo $a_n = 48$ numa P.G. onde o 1º termo é 3 e a razão é 2.

6) Calcule a razão de uma P.G. onde o 1º termo é 3 e o 6º termo é 96.

7) Calcule a razão de uma P.G. onde o 3º termo é 1 e o 6º termo é $\frac{1}{512}$.

8) Escreva uma P.G. onde o 4º termo é 2 e o 6º termo é 18.

9) Calcule o 10º termo de uma P.G. de razão $-\frac{1}{2}$ e cujo 5º termo é 3.

10) Escreva uma P.G. onde o 3º termo é −16 e o 6º termo é 2.

11) Calcule o valor de x, sabendo que $\frac{1}{9}$, x e $\frac{1}{81}$ são três termos consecutivos de uma P.G.

12) Escreva três termos da forma $5x - 2$, $x + 2$ e $x - 7$, sabendo que são termos consecutivos de uma P.G.

13) Escreva três termos da forma $x + 1$, $5x - 1$ e $13x + 1$, sabendo que são termos consecutivos de uma P.G.

14) Escreva uma P.G., sabendo que os seus três primeiros termos são da forma $(x-2)^2$, $3 - x$ e 1.

15) Escreva uma P.G., sabendo que os seus três primeiros termos são da forma $x - 4$, $x - 1$ e $3x + 1$.

16) Calcule os três primeiros termos de uma P.G. de razão 4, sabendo que o produto desses termos é 27.
(**Sugestão:** chame os termos de $\frac{x}{4}$, x e 4x.)

17) Escreva uma P.G. onde o 2º termo é 8 e a soma dos seus três primeiros termos é −12.

18) Escreva uma P.G. onde o 1º termo é 15 e a soma dos três primeiros termos é 315.

19) Calcule três números em P.G. cujo produto é 125 e cuja soma é $\frac{35}{2}$.
(**Sugestão:** chame os termos de $\frac{x}{q}$, x e $x \cdot q$.)

20) Escreva uma P.G. onde a soma dos três primeiros termos é −14 e o produto desses termos é 216.

21) Calcule a soma dos 8 primeiros termos da P.G. (1, 2, 4, ...).

22) Calcule a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (−1, 2, −4, 8, ...).

23) Calcule a soma dos 6 primeiros termos da P.G. (54, −18, 6, ...).

24) Calcule a soma dos 9 primeiros termos da P.G. $(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, ...)$.

25) Calcule a soma dos 7 primeiros termos da P.G. $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, ...)$.

26) Calcule a soma dos 8 primeiros termos da P.G. $(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$.

27) Escreva uma P.G., sabendo que a soma dos 4 primeiros termos é 40 e a razão é $\frac{1}{3}$.

28) Escreva uma P.G. de razão $-\frac{1}{2}$ e cuja soma dos 5 primeiros termos é − 55.

29) Escreva uma P.G. de razão 4 e cuja soma dos 5 primeiros termos é $-\frac{341}{32}$.

30) Calcule, em módulo, o produto dos 6 primeiros termos de uma P.G. cuja razão é 2 e cujo primeiro termo é $\frac{1}{16}$.

31) Calcule, em módulo, o produto dos 8 primeiros termos da P.G. $(-\frac{1}{1024}, -\frac{1}{128}, -\frac{1}{16}, ...)$.

32) Calcule o limite da soma dos termos das P.G.:

a) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$.

b) (−54, −18, −6, −2, ...).

c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, ...)$.

d) $(10, 5, \frac{5}{2}, ...)$.

e) (0,5; 0,05; 0,005; ...).

f) (0,13; 0,0013; 0,000013; ...).

g) (0,04; 0,0004; 0,000004; ...).

h) (0,3; 0,03; 0,003; ...).

33) Escreva uma P.G. cuja razão é $\frac{2}{3}$ e o limite da soma dos seus termos é 54.

34) Escreva uma P.G. onde o 1º termo é $\frac{7}{10}$ e o limite da soma dos seus termos é $\frac{7}{9}$.

35) Escreva uma P.G. onde o 3º termo é igual a 5 e o limite da soma dos seus termos é o dobro do 1º termo.

RESPOSTAS

1) a) $q = 2$

b) $q = -\frac{1}{2}$

c) $q = 2$

d) $q = 3$

e) $a_6 = 3$

f) $a_{11} = 1$

g) $a_{23} = \frac{1}{2^{23}}$

h) $a_8 = -\frac{8}{243}$

i) $a_6 = 972$

j) $a_7 = \frac{1}{1458}$

2) $a_1 = 2$, (2, 4, 8, 16, ...)

3) (−81, 27, −9, 3, ...)

4) (−81, −27, −9, ...)

5) n = 5, 5º termo

6) q = 2

7) $q = \frac{1}{8}$

8) $q = 3$ e $a_1 = \frac{2}{27} \rightarrow (\frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, ...)$; ou $q = -3$ e

$a_1 = -\frac{2}{27} \rightarrow (-\frac{2}{27}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{3}, ...)$

9) $a_{10} = -\frac{3}{32}$

10) (−64, 32, −16, 8, ...)

11) $x = \frac{1}{27}$ ou $x = -\frac{1}{27}$

12) para $x = \frac{1}{4}$ temos $-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{4}$

e

para x = 10 temos 48, 12, 3

13) para x = 0 temos 1, −1, 1

para x = 2 temos 3, 9, 27

14) para $x = \frac{5}{2}$ temos $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...)$

15) para $x = -\frac{1}{2}$ temos $(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, ...)$

para x = 5 temos (1, 4, 16, ...)

16) x = 3; $(\frac{3}{4}, 3, 12, ...)$

17) para q = −2 temos (−4, 8, −16, ...)

para $q = -\frac{1}{2}$ temos (−16, 8, −4, ...)

18) para q = −5 temos (15, −75, 375, ...)

para q = 4 temos (15, 60, 240, ...)

19) para q = 2 temos $(\frac{5}{2}, 5, 10, ...)$

para $q = \frac{1}{2}$ temos $(10, 5, \frac{5}{2}, ...)$

20) para q = −3 temos (−2, 6, −18, ...)

para $q = -\frac{1}{3}$ temos (−18, 6, −2, ...)

21) $q = 2$, $a_8 = 128$, $S_8 = 255$

22) $q = -2$, $a_{10} = 512$, $S_{10} = 341$

23) $q = -\frac{1}{3}$, $a_6 = -\frac{2}{9}$, $S_6 = \frac{364}{9}$

24) $q = 2$, $a_9 = -32$, $S_9 = -\frac{511}{8}$

25) $q = -\frac{3}{2}$, $a_7 = \frac{243}{64}$, $S_7 = \frac{463}{192}$

26) $q = -\frac{1}{2}$, $a_8 = -\frac{1}{128}$, $S_8 = -\frac{85}{128}$

27) (27, 9, 3, 1, ...)

28) (−80, 40, −20, ...)

29) $(-\frac{1}{32}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, ...)$

30) $|P_6| = \frac{1}{512}$

31) $q = 2^3$ $a_8 = -2^{11}$ $|P_8| = 2^4$

32) a) S = 2

b) S = −81

c) $S = \frac{3}{2}$

d) S = 20

e) $S = \frac{5}{9}$

f) $S = \frac{13}{99}$

g) $S = \frac{4}{99}$

h) $S = \frac{1}{3}$

33) $(18, 12, 8, \frac{16}{3}, ...)$

34) $(\frac{7}{10}, \frac{7}{100}, \frac{7}{1000}, ...)$

35) (20, 10, 5, ...)

SEQÜÊNCIA B

1) Escreva uma P.G. onde a soma do 3º com o 4º termo é 4 e o 3º termo é igual a 9 vezes o 5º termo.

$q = -\frac{1}{3}$, $a_1 = 54$ e (54, −18, 6, ...); $q = \frac{1}{3}$, $a_1 = 27$ e (27, 9, 3, ...)

2) Escreva uma P.G. onde a soma dos 3 primeiros termos é igual a 28 e somando-se 2 unidades ao 2º termo estes constituem os três primeiros de uma P.A.

$q = \frac{1}{2}$, e (16, 8, 4, ...) ou q = 2, e (4, 8, 16, ...)

3) Escreva uma P.G. onde a soma dos três primeiros termos é igual a −28 e a diferença entre o 3º e o 1º termo é 12.

$q = -\frac{4}{5}$, e $(-\frac{100}{3}, \frac{80}{3}, -\frac{64}{3}, ...)$ ou $q = \frac{1}{2}$ e (−16, −8, −4, ...)

4) Determine os valores de m para os quais existem três números reais em P.G., de modo que o 2º seja igual a 1 e a soma deles seja igual a m.

$m \leq -1$ ou $m \geq 3$

5) Calcule a geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,555... = 0,5 + 0,05 + 0,005 + ... = $\frac{5}{9}$

b) 0,1313... = 0,13 + 0,0013 + ... = $\frac{13}{99}$

c) 2,777... = 2 + 0,7 + 0,07 + ... = $2\frac{7}{9}$

d) 3,018018... $= 3 + 0{,}018 + 0{,}000018 + \ldots = 5\frac{6}{999}$

e) 0,3555... $= 0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}005 + \ldots = 0{,}3 + \frac{5}{90} = \frac{16}{45}$

f) 0,37222... $= 0{,}37 + 0{,}002 + 0{,}0002 + \ldots = \frac{67}{180}$

g) 0,54242... $= 0{,}5 + 0{,}042 + 0{,}00042 + \ldots = \frac{179}{330}$

h) 2,15333... $= 2{,}15 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots = \frac{323}{150}$

6) Mostre que o limite da soma dos termos da P.G.

$\left(2x - 1, \frac{2x - 1}{4x^2}, \frac{2x - 1}{16x^4}, \ldots\right)$ é $\frac{4x^2}{2x + 1}$.

7) Determine uma P.G. onde o limite da soma dos seus termos é 2 e o limite da soma dos quadrados de seus termos é $\frac{4}{5}$.

Sugestão: observe que $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots)$ é uma P.G. de razão q^2, onde **q** é a razão da P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

$q = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$ e $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots\right)$

8) É dada uma seqüência infinita de quadrados onde cada um a partir do segundo tem por vértices os pontos médios dos lados do anterior. Calcule a soma das áreas desses quadrados, sabendo que o primeiro quadrado tem 10 m de lado.

a seqüência é (100, 50, 25, ...)
e $S = 200\ m^2$.

9) É dada uma seqüência infinita de triângulos onde cada um a partir do segundo tem por vértices os pontos médios dos lados do anterior. Calcule o limite da soma das áreas em função do lado a do primeiro triângulo.

a seqüência é $\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \frac{a^2\sqrt{3}}{16}, \frac{a^2\sqrt{3}}{64}, \ldots\right)$

e $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

10) É dada uma seqüência infinita de círculos onde cada um a partir do segundo está inscrito no quadrado inscrito no círculo anterior. Calcule o limite da soma das áreas dos círculos em função do raio r do primeiro círculo.

a seqüência é $\left(\pi r^2, \frac{\pi r^2}{2}, \frac{\pi r^2}{4}, \ldots\right)$

e $S = 2\pi r^2$.

11) Resolva as equações:

a) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 6$ $\quad x = 4$

b) $x^2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{9} + \ldots = \frac{3}{8}$ $\quad x = \pm\frac{1}{2}$

c) $(x + 3)^2 + \frac{(x + 3)^2}{2} + \frac{(x + 3)^2}{4} + \ldots = 8$ $\quad x = -5$ ou $x = -1$

d) $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \ldots = x + 3x + 5x + \ldots + 21x - 718$ $\quad x = 6$

Matrizes

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) adquira a noção do conceito de matriz.
b) saiba reconhecer a posição de um elemento qualquer de uma matriz.
c) conheça as propriedades e as operações com matrizes.

MATRIZ

26. Definição:

Sejam os conjuntos $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}^*$, $J = \{1, 2, 3, \ldots, m\} \subset \mathbb{N}^*$ e o produto cartesiano $I \times J = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, m), (2, 1), \ldots, (2, m), \ldots, (n, 1), \ldots, (n, m)\}$, ou seja:

$$I \times J = \{(i, j) \mid i \in I \text{ e } j \in J\}$$

Consideremos, agora, a função $f: I \times J \to \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto y = a_{ij}$

isto é, f é uma função tal que:

ao par (1, 1) faz corresponder a_{11}
ao par (1, 2) faz corresponder a_{12}
....
ao par (1, m) faz corresponder a_{1m}
ao par (2, 1) faz corresponder a_{21}
....
ao par (2, m) faz corresponder a_{2m}
....
ao par (n, 1) faz corresponder a_{n1}
....
ao par (n, m) faz corresponder a_{nm}

Chama-se **matriz** de ordem **n** por **m** o conjunto das imagens

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}$,

dispostas em uma tabela retangular de n linhas e m colunas do seguinte modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

onde a_{ij} é o elemento da **i-ésima** linha e da **j-ésima** coluna.

27. Aplicação:

1º) Sendo $I = \{1, 2, 3\}$, $J = \{1, 2, 3, 4\}$ e a função $f: I \times J \to \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto y = a_{ij}$

assinale as afirmações corretas:

a. (X) O conjunto $\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}\}$ é o conjunto imagem da função f.

b. ( ) A matriz definida por f tem 3 linhas e 3 colunas.

c. (X) A matriz definida por f tem 3 linhas e 4 colunas.

d. ( ) A matriz definida por f é de ordem 3 por 3.

e. (X) A matriz definida por f é de ordem 3 por 4.

f. (X) A tabela $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ é a matriz definida por f.

g. (X) O elemento a_{23} está na intersecção da 2ª linha com a 3ª coluna.

h. ( ) O elemento a_{23} está na intersecção da 2ª linha com a 4ª coluna.

i. ( ) O elemento a_{24} está na intersecção da 2ª linha com a 2ª coluna.

j. (X) O elemento a_{24} está na intersecção da 2ª linha com a 4ª coluna.

l. (X) Os elementos da 2ª linha são a_{21}, a_{22}, a_{23} e a_{24}.

m. (X) Todos os elementos da 2ª linha são da forma a_{2j} com $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

n. ( ) Todos os elementos da 3ª linha são da forma a_{1j} com $j \in J$.

o. (X) Todos os elementos da 3ª linha são da forma a_{3j} com $j \in J$.

p. ( ) Todos os elementos da 3ª linha são da forma a_{3j} com $j \in I$.

q. (X) Os elementos da 3ª coluna são a_{13}, a_{23} e a_{33}.

r. (X) Todos os elementos da 3ª coluna são da forma a_{i3} com $i \in I$.

s. ( ) Todos os elementos da 3ª coluna são da forma a_{i2} com $i \in I$.

t. ( ) Todos os elementos da 3ª coluna são da forma a_{i3} com $i \in J$.

u. (X) Todos os elementos da 1ª coluna são da forma a_{i1} com $i \in I$.

2º) Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e assinale as afirmações corretas:

a. (X) A matriz M tem 3 linhas e 4 colunas.

b. ( ) A matriz M tem 2 linhas e 4 colunas.

c. (X) A matriz M é de ordem 3 por 4.

d. (X) M foi definida pela função $f: I \times J \to \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto a_{ij}$ onde $I = \{1, 2, 3\}$ e $J = \{1, 2, 3, 4\}$.

e. (X) Os elementos da 1ª linha são 1, 3, 5 e 2.

f. ( ) Os elementos da 2ª linha são −2, −1, 3 e 4.

g. ( ) Os elementos da 2ª coluna são 1, 4 e −2.

h. (X) Os elementos da 2ª coluna são 3, 2 e −1.

i. (X) Os elementos da 4ª coluna são 2, 7 e 4.

j. (X) O elemento a_{23} de M é zero.

l. ( ) O elemento a_{33} de M é zero.

m. (X) O elemento a_{33} de M é 3.

n. (X) O elemento a_{12} de M é 3.

o. ( ) O elemento a_{32} de M é −2.

p. ( ) O elemento a_{24} de M é 4.

3º) Considere a matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ -\frac{2}{3} & 1 & -6 \end{pmatrix}$ e complete:

a) A matriz M tem ...4... linhas e ...3... colunas.

b) A matriz M é de ordem ...4... por ...3... .

c) A matriz M foi definida por $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto a_{ij}$ onde I = {1, 2, 3, 4} e J = {1, 2, 3}

d) Os elementos da 1ª linha são: $-1, 2$ e $\frac{1}{2}$

e) Os elementos da 3ª linha são: 0, 4 e 3 .

f) Os elementos da 2ª coluna são: 2, −3, 4 e 1.

g) Os elementos da 3ª coluna são: $\frac{1}{2}$, −2, 3 e −6

h) a_{21} = ...5... a_{41} = $\frac{2}{3}$ a_{33} = ...3... a_{12} = ...2... a_{23} = ...−2... a_{43} = ...−6...

a_{22} = ...−3... a_{13} = $\frac{1}{2}$

4º) Considere I = {1, 2, 3}, J = {1, 2, 3} e a função $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $(i, j) \longmapsto a_{ij}$, onde $a_{ij} = 3i - j$ e complete:

a) A matriz definida por f tem ...3... linhas e ...3... colunas.

b) A matriz definida por f é de ordem ...3... por ...3...

c) Os elementos da matriz definida por f são da forma $a_{ij} = 3i - j$ e portanto:

$a_{11} = 3 \cdot 1 - 1 =$ ...2... , $a_{12} = 3 \cdot$ ...1... $- 2 =$ ...1...   e $a_{13} = 3 \cdot$ ...1... − ...3... = ...0...

$a_{21} = 3 \cdot 2 -$ ...1... = ...5... , a_{22} = ...3.2 − 2 = 4...   e a_{23} = ...3.2 − 3 = 3...

a_{31} = ...3.3 − 1 = 8... , a_{32} = ...3.3 − 2 = 7...   e a_{33} = ...3.3 − 3 = 6...

d) A matriz definida por f é: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

ALGUMAS MATRIZES PARTICULARES

28. **Matriz quadrada de ordem** n é a matriz onde o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, é uma matriz de ordem n por n.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

29. Matriz identidade de ordem n é a matriz onde $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 3 e indica-se por I_3.

30. Matriz transposta de uma matriz de ordem n **por** m.

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ de ordem n por m.

Chama-se **matriz transposta** de A à matriz

$A^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ de ordem m por n onde:

$b_{11} = a_{11}, b_{12} = a_{21}, \dots b_{1n} = a_{n1}$ (1ª linha de A^t é igual à 1ª coluna de A)

$b_{21} = a_{12}, b_{22} = a_{22}, \dots b_{2n} = a_{n2}$ (2ª linha de A^t é igual à 2ª coluna de A)

....

$b_{m1} = a_{1m}, b_{m2} = a_{2m}, \dots b_{mn} = a_{nm}$ (**m-ésima** linha de A^t é igual à **n-ésima** coluna de A)

ou seja, as linhas da matriz A^t coincidem ordenadamente com as colunas da matriz A.

Exemplo:

Sendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de ordem 2 por 3, a sua transposta será

$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ de ordem 3 por 2.

IGUALDADE DE MATRIZES

31. Definição:

Sejam as matrizes M e M' de mesma ordem n por m.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad e \quad M' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Dizemos que a matriz **M** é **igual** à matriz **M'** se e somente se:

$$a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12},\ \dots\ a_{1m} = b_{1m}$$
$$a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22},\ \dots\ a_{2m} = b_{2m}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1} = b_{n1},\ a_{n2} = b_{n2},\ \dots\ a_{nm} = b_{nm}$$

isto é, $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \dots m\}$.

32. Aplicação:

1º) Considere as matrizes $M = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $M' = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$ e complete:

$M = M' \iff \begin{cases} a = \text{.....}7\text{.....} \\ b = \text{.....}5\text{.....} \end{cases}$

2º) Sendo $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2x - 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcule o valor de x, sabendo que M = M'.

Para isso complete: $M = M' \iff$ .....2x − 3..... = 9 $\iff$ x = ...6.....

3º) Sendo $M = \begin{pmatrix} 2x - 3y & -3 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$ e $M' = \begin{pmatrix} -10 & -3 \\ 1 & x + 3y \end{pmatrix}$, calcule os valores de x e de y, sabendo que M = M'.

Para isso complete:

$M = M' \iff \begin{cases} 2x - 3y = \text{.....}-10\text{.....} \\ \text{.....}x + 3y\text{.....} = 13 \end{cases}$ e resolvendo o sistema vem:

$3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$2 \cdot 1 - 3y = -10 \Rightarrow \boxed{y = 4}$

Exercícios a resolver: itens 1 a 5, pág. 51.

MATRIZ SOMA

33. Definição:

Sejam as matrizes A e B de mesma ordem n por m onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Chama-se **matriz soma** das matrizes A e B à matriz

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{onde}$$

$$c_{11} = a_{11} + b_{11},\ c_{12} = a_{12} + b_{12},\ \dots\ c_{1m} = a_{1m} + b_{1m}$$
$$c_{21} = a_{21} + b_{21},\ c_{22} = a_{22} + b_{22},\ \dots\ c_{2m} = a_{2m} + b_{2m}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_{n1} = a_{n1} + b_{n1},\ c_{n2} = a_{n2} + b_{n2},\ \dots\ c_{nm} = a_{nm} + b_{nm}$$

ou seja, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \dots m\}$.

Indica-se a matriz soma por **C = A + B**.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 1+(-3) \\ 4+1 & -5+2 \\ -1+(-6) & 0+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -3 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

34. Aplicação:

1º) $$\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 \\ 3 & 22 \end{pmatrix}$$

2º) $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ \frac{2}{3} & -3 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3º) Determine o valor de x, sabendo que

$$\begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Para isso complete:

$x^2 - 6 +$ ..x.. = ..0.., e, resolvendo esta equação em x, vem:

$x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 25$ e $\sqrt{\Delta} = 5$

$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$ → $x_1 = -3$, $x_2 = 2$

O valor de x é ..-3.. ou ..2.. .

4º) Determine os valores de x e y, sabendo que

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2x & -7 \\ -5 & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ y & 3 \\ 5 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

Para isso complete e resolva o sistema obtido:

$$\begin{cases} 2x + \text{..}y\text{..} = \text{..}1\text{..} \\ 3x + \text{..}(-12)\text{..} = \text{..}2y\text{..} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$7x = 14$

$x = 2$

$2x + y = 1 \Longrightarrow 2.2 + y = 1 \Longrightarrow y = -3$

O valor de x é ..2.. e o valor de y é ..-3.. .

MATRIZ DIFERENÇA

35. Definição:

Sejam as matrizes A e B de mesma ordem n por m onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Chama-se **matriz diferença** entre as matrizes A e B à matriz

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix} \text{ onde}$$

$c_{11} = a_{11} - b_{11}, \; c_{12} = a_{12} - b_{12} \; \ldots \; c_{1m} = a_{1m} - b_{1m}$

$c_{21} = a_{21} - b_{21}, \; c_{22} = a_{22} - b_{22} \; \ldots \; c_{2m} = a_{2m} - b_{2m}$

....

$c_{n1} = a_{n1} - b_{n1}, \; c_{n2} = a_{n2} - b_{n2} \; \ldots \; c_{nm} = a_{nm} - b_{nm}$

ou seja, $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \ldots m\}$.

Indica-se a matriz diferença por $C = A - B$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 1-(-3) \\ 4-1 & -5-2 \\ -1-(-6) & 0-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

36. Aplicação:

1º)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \\ 7 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 1 \\ 8 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2º) Determine a matriz X, sabendo que $X - A = B$ e que

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

Para isso complete:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$a_{11} - 3 = 1 \iff a_{11} = 1 + 3 = 4$

$a_{12} - (-2) = 0 \iff a_{12} = 0 - 2 = -2$

$a_{21} - 5 = -3 \iff a_{21} = -3 + 5 = 2$

$a_{22} - 4 = 7 \iff a_{22} = 7 + 4 = 11$

Então a matriz $X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

PRODUTO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

37. Definição:

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$ e um número real k.

O produto de k por A é uma matriz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$ onde

$b_{11} = ka_{11},\ b_{12} = ka_{12} \ \dots \ b_{1m} = ka_{1m}$

$b_{21} = ka_{21},\ b_{22} = ka_{22} \ \dots \ b_{2m} = ka_{2m}$

....

$b_{n1} = ka_{n1},\ b_{n2} = ka_{n2} \ \dots \ b_{nm} = ka_{nm}$

ou seja, $b_{ij} = ka_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \dots n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \dots m\}$.

Indica-se esse produto por $B = k \cdot A$.

Exemplo: Seja $k = 5$ e $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Então: $5 \cdot A = 5 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 20 & 25 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$

38. Aplicação:

1º) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X, sabendo que X + 2A = B.

Para isso complete:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{11} + 2 \cdot 1 = -3 \iff a_{11} = -3 - 2 = -5$

$a_{12} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \iff a_{12} = 2 - 1 = 1$

$a_{21} + 2 \cdot (-3) = 5 \iff a_{21} = 5 + 6 = 11$

$a_{22} + 2 \cdot 2 = -8 \iff a_{22} = -8 - 4 = -12$

$a_{31} + 2 \cdot 4 = 7 \iff a_{31} = 7 - 8 = -1$

$a_{32} + 2 \cdot 5 = 0 \iff a_{32} = -10$

Então a matriz $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 11 & -12 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$

29º) Calcule os valores de x e y, sabendo que

$$\begin{pmatrix} 2x & -2 & \frac{4}{3} \\ -5 & 4x & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -9y & 6 & 2 \\ 1 & 15y & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -\frac{14}{3} & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Para isso complete e resolva o sistema obtido:

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{3} \cdot (-9y) = -2 \Rightarrow 2x - 3y = -2 \\ 4x + \frac{1}{3} \cdot 15y = 7 \Rightarrow 4x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 6y = 4 \\ 4x + 5y = 7 \\ \hline 11y = 11 \Rightarrow \boxed{y = 1} \text{ e } 2x - 3 \cdot 1 = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

O valor de x é $\frac{1}{2}$ e o valor de y é 1.

Exercícios a resolver: itens 6 a 10, pág. 51.

PRODUTO DE UMA MATRIZ POR OUTRA

39. Definição:

Consideremos duas matrizes A e B, onde o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$ de ordem n por p e

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix}$$ de ordem p por m

Chama-se **matriz produto** de A por B à matriz C de ordem n por m dada por

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$ onde:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \ldots + a_{1p} \cdot b_{p1}$ (Soma dos produtos dos elementos da 1ª linha de A pelos correspondentes elementos da 1ª coluna de B)

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \ldots + a_{1p} \cdot b_{p2}$ (1ª linha de A com a 2ª coluna de B)

....

$c_{1m} = a_{11} \cdot b_{1m} + a_{12} \cdot b_{2m} + \ldots + a_{1p} \cdot b_{pm}$ (1ª linha de A com a m-ésima coluna de B)

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \ldots + a_{2p} \cdot b_{p1}$ (2ª linha de A com a 1ª coluna de B)

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + \ldots + a_{2p} \cdot b_{p2}$ (2ª linha de A com a 2ª coluna de B)

....

$c_{2m} = a_{21} \cdot b_{1m} + a_{22} \cdot b_{2m} + \ldots + a_{2p} \cdot b_{pm}$ (2ª linha de A com a m-ésima coluna de B)

....

$c_{n1} = a_{n1} \cdot b_{11} + a_{n2} \cdot b_{21} + \ldots + a_{np} \cdot b_{p1}$ (n-ésima linha de A com a 1ª coluna de B)

$c_{n2} = a_{n1} \cdot b_{12} + a_{n2} \cdot b_{22} + \ldots + a_{np} \cdot b_{p2}$ (n-ésima linha de A com a 2ª coluna de B)

....

$c_{nm} = a_{n1} \cdot b_{1m} + a_{n2} \cdot b_{2m} + \ldots + a_{np} \cdot b_{pm}$ (n-ésima linha de A com a m-ésima coluna de B)

isto é, $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}, \forall\, i \in \{1, 2, \ldots n\}$ e $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots m\}$.

Assim, c_{ij} é a soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos correspondentes elementos da j-ésima coluna de B.

Exemplo:

Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ onde:

a matriz A é de ordem 2 por 4;
a matriz B é de ordem 4 por 3;
a matriz produto de A por B é de ordem 2 por 3.

Então:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$ onde:

$c_{11} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 41$ (1ª linha de A com a 1ª coluna de B)
$c_{12} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 12$ (1ª linha de A com a 2ª coluna de B)
$c_{13} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 46$ (1ª linha de A com a 3ª coluna de B)
$c_{21} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 41$ (2ª linha de A com a 1ª coluna de B)
$c_{22} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 11$ (2ª linha de A com a 2ª coluna de B)
$c_{23} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 36$ (2ª linha de A com a 3ª coluna de B)

Portanto,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 41 & 12 & 46 \\ 41 & 11 & 36 \end{pmatrix}$$

40. Aplicação:

1º) Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, complete:

a) A matriz A é de ordem 2 por 3.
b) A matriz B é de ordem 3 por 2.
c) O número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e portanto podemos calcular a matriz produto de A por B.
d) A matriz A · B é de ordem 2 por 2, isto é, tem 2 linhas e 2 colunas.
e) Então,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{onde:}$$

$c_{11} = 2.1 + 1.(-1) + 0.5 = 2 - 1 + 0 = 1$
(1ª linha de A com a 1ª coluna de B)

$c_{12} = 2.2 + 1.0 + 0.3 = 4 + 0 + 0 = 4$
(1ª linha de A com a 2ª coluna de B)

$c_{21} = 3.1 + 4(-1) - 2.5 = 3 - 4 - 10 = -11$
(2ª linha de A com a 1ª coluna de B)

$c_{22} = 3.2 + 4.0 - 2.3 = 6 + 0 - 6 = 0$
(2ª linha de A com a 2ª coluna de B)

f) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}$

2º) Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, complete:

a) A matriz A é de ordem 3 por 2.
b) A matriz B é de ordem 2 por 1.
c) O número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e portanto podemos calcular a matriz produto de A por B.
d) A matriz A · B é de ordem 3 por 1, isto é, tem 3 linhas e 1 coluna.
e) Então,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} \quad \text{onde:}$$

$c_{11} = 3.1 + 0.(-2) = 3$ (1ª linha de A com a 1ª coluna de B)
$c_{21} = -2.(1) + (-1).(-2) = 0$ (2ª linha de A com a 1ª coluna de B)
$c_{31} = 1.1 + 5.(-2) = 1.10 = -9$ (3ª linha de A com a 1ª coluna de B)

f) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$

3º) Calcule a matriz produto de A por B quando:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Sendo a matriz A de ordem 2 por 2 e B de ordem 2 por 3, a matriz A.B será de ordem 2 por 3.

$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Sendo a matriz A de ordem 3 por 2 e B de ordem 2 por 3, a matriz A.B será de ordem 3 por 3.

$A.B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \\ -1 & 19 & -9 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sendo a matriz A de ordem 2 por 3 e B de ordem 3 por 1, a matriz A.B será de ordem 2 por 1.

$A.B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Sendo a matriz A de ordem 1 por 3 e a matriz B de ordem 3 por 2, a matriz A.B será de ordem 1 por 2.

$A.B = \begin{pmatrix} 7 & -15 \end{pmatrix}$

Exercícios a resolver: item 11, págs. 51 e 52.

4º) Calcule os valores de **a** e **b** na igualdade $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$

Para isso efetue o produto indicado nessa igualdade.

Assim:

$\begin{pmatrix} 4a+6 \\ 8+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ e pela igualdade de matrizes você tem

$\begin{cases} 4a + 6 = 10 \iff a = 1 \\ 8 + 2b = -2 \iff b = -5 \end{cases}$

5º) Calcule o valor de **x** na igualdade

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ x+3 & 0 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \end{pmatrix}$

Para isso complete:

$\begin{pmatrix} -2 - 1 \cdot (x+3) + 3(2x-1) & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5x-8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \end{pmatrix}$ e pela igualdade você tem

$5x - 8 = 12 \iff x = 4$.

6º) Calcule o valor de **x** na igualdade $\begin{pmatrix} x & 2x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \end{pmatrix}$

Para isso complete:

$\begin{pmatrix} x^2 + 2x - 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \end{pmatrix}$ e pela igualdade você tem

$x^2 + 2x - 5 = 10$ e resolvendo a equação em x vem:

$x^2 + 2x - 5 = 10 \iff x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = 4 + 60 = 64$

$x = \frac{-2 \pm 8}{2}$ → $x' = -5$, $x'' = 3$

Você obteve $x = -5$ ou $x = 3$.

7º) Calcule os valores de **x** e **y** na igualdade $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Para isso complete:

$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y = 3 \\ 3x-y = 7 \end{cases}$ e resolvendo o sistema vem:

$$\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \\ \hline \end{array}$$

$5x = 10 \iff \boxed{x = 2}$ e $2.2 + y = 3 \iff \boxed{y = -1}$

Você obteve x = ...2..... e y = ...-1.... .

8º) Calcule os valores de x, y e z na igualdade

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + 2z \\ -4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -16 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = -2 \\ x - y + 2z = 6 \\ -4z = -16 \iff \boxed{z = 4} \end{cases}$$

E substituindo o valor de z pelo valor 4 nas duas primeiras equações vem:

$$\begin{cases} x + y - 4 = -2 \\ x - y + 8 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Você obteve x = ...0....., y = ...2...... e z= ....4..... .

Exercícios a resolver: item 12, pág. 53.

9º) No 7º exercício você tinha a equação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

e, efetuando o produto, você obteve o sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

Agora, tendo o sistema, você irá escrever a equação matricial correspondente.

Assim: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes das incógnitas}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Escreva, agora, as equações matriciais correspondentes aos sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ \frac{1}{3}x - 2y = -5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} -2x + y - 3z = -13 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - 5y - 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2x + 4y + z = -5 \\ -3x - 6y - 2z = 8 \\ - 4y - 3z = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & -6 & -2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercícios a resolver: item 13, pág. 53.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Calcule os valores de **x**, **y**, **z** e **w** nas matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ x & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & z \\ -4 & w \end{pmatrix}$,

de modo que $A = B = C$.

2) Calcule o valor de **x** de modo que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5x - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3) Calcule o valor de **x** nas matrizes $M = \begin{pmatrix} 2x^2 - 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e

$M' = \begin{pmatrix} -11x & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ de modo que $M = M'$.

4) Calcule os valores de **x** e **y** de modo que

$$\begin{pmatrix} 2x - 3y & 2 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 5x + y \end{pmatrix}$$

5) Calcule os valores de x e y de modo que

$\begin{pmatrix} 2x + 2 & -4 & 3x + 5y + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y & -4 & y - 2x \end{pmatrix}$.

6) Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & 3 \end{pmatrix}$ e

$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcule a matriz M dada por:

a) $M = A + B$

b) $M = B - C$

c) $M = \frac{1}{3}B$

d) $M = -\frac{2}{3}B + \frac{1}{2}C$

7) Calcule os valores de **x**, **y** e **z** nas matrizes

$A = \begin{pmatrix} x & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & y \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ z & -3 \end{pmatrix}$ de modo que $B + C = 2 \cdot A$.

8) Calcule o valor de **x** nas matrizes

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3x^2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ x^2 + 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -6 \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$ de modo que $A - B = \frac{1}{2}C$.

9) Calcule **x** e **y** de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ -1 & \frac{3}{4} & 5 \\ 5 & x & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2y \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -10 & -2y & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

10) Determine uma matriz X de modo que, sendo

$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & -12 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -12 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$,

se tenha $X + \frac{4}{3}A = B$.

11) Calcule os produtos:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

12) Nas equações abaixo, determine o valor de x, y e z:

a) $\begin{pmatrix} -2x & 1 & x \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -x \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 \\ x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x-1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ -1 & y-1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-5 \\ z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} x & -3 \\ x^2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & x-3 \\ x^3+y^2 & 8 \end{pmatrix}$

13) Escreva a equação matricial correspondente ao sistema:

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ -x - 2y + 5z = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 1 \\ -3x + 2y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ -3x + 5z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ 3x - 7y + z = 13 \\ x - 4y + 9z = 6 \end{cases}$

RESPOSTAS

1) $x = -4$; $y = 2$; $z = 5$ e $w = -1$

2) $x = 2$

3) $x = -6$ ou $x = \frac{1}{2}$

4) $x = 3$ e $y = -2$

5) $x = -\frac{20}{19}$ e $y = \frac{6}{19}$

6) a) $M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & -12 & -2 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 1 \\ -4 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 7 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7) $x = -\frac{3}{2}$; $y = -5$ e $z = 10$

8) $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$

9) $x = -4$ e $y = 12$ ou $x = 3$ e $y = 5$

10) $X = \begin{pmatrix} -5 & \frac{1}{2} & -14 \\ 3 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

11) a) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -7 & 29 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 9 & 9 & 10 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 26 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ -2 & 14 & -2 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 14 & -7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 10 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 13 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

12) a) $x = 4$
b) $x = -2$ ou $x = 3$
c) $x = 2$ e $y = 3$
d) $x = -1$; $y = -3$ e $z = -1$
e) $x = -1$; $y = 3$ e $z = 2$
f) $x = 3$ ou $x = -3$ e $y = -1$

13) a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$

SEQÜÊNCIA B

1) Resolva a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

a matriz solução é $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) Calcule os valores de x, y e z de modo que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{25} & y^2 \\ -27 & \log_2 \frac{1}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^x & 9 \\ y^3 & z \end{pmatrix}$$

$x = -2$, $y = -3$ e $z = -5$

3) Escreva uma matriz quadrada de ordem 3 de modo que $a_{ij} = i - 3j$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -8 \\ -1 & -4 & -7 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

4) Escreva uma matriz quadrada de ordem 3 onde $a_{ij} = -i + 2j$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Escreva uma matriz quadrada de ordem 3 onde $a_{ij} = 0$ para $i + j = 4$ e $a_{ij} = \sqrt{2}$ para $i + j \neq 4$.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

6) Escreva uma matriz de ordem 3×4 de modo que $a_{ij} = -1$ para $i \leqslant j$ e $a_{ij} = 2$ para $i > j$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

calcule a matriz $M = (A + B^t) \cdot (A^t - B)$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

8) Resolva a equação matricial:

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 8 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

(**Sugestão:** observe que X deverá ser uma matriz de ordem 2.)

$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

9) Resolva o sistema de equações matriciais:

$$\begin{cases} X + Y = 2A + B \\ X - Y = 4A - 3B \end{cases} \quad \text{onde}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10) Calcule os valores de x, y e z na matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & y-3 \\ 5-x & y & 5 \\ 1 & z+2 & x \end{pmatrix}$$, sabendo que A é uma matriz simétrica, isto é, $A^t = A$

$x = 2$, $y = 4$ e $z = 3$

Determinante de uma Matriz Quadrada

Neste capítulo, pretende-se que o aluno esteja apto a:

a) calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e de ordem 3 (regra de Sarrus).
b) calcular o determinante de matrizes de ordem maior que 3, por abaixamento de ordem, aplicando os teoremas de Laplace e Jacobi e a regra prática de Chió.
c) reconhecer e aplicar as propriedades dos determinantes.

DETERMINANTE

41. Definição: Consideremos o conjunto Q de todas as matrizes M quadradas de ordem n.

Seja a função $f: Q \to \mathbb{R}$, $M \mapsto y = \text{determinante de } M$, onde **determinante de M** é um número real que se obtém da seguinte forma:

1 – Se M é de ordem 1, ou seja, $M = (a_{11})$, então determinante de M é igual a a_{11} ou ainda $\det M = a_{11}$;

2 – Se M é de ordem 2, ou seja, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, então $\det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$;

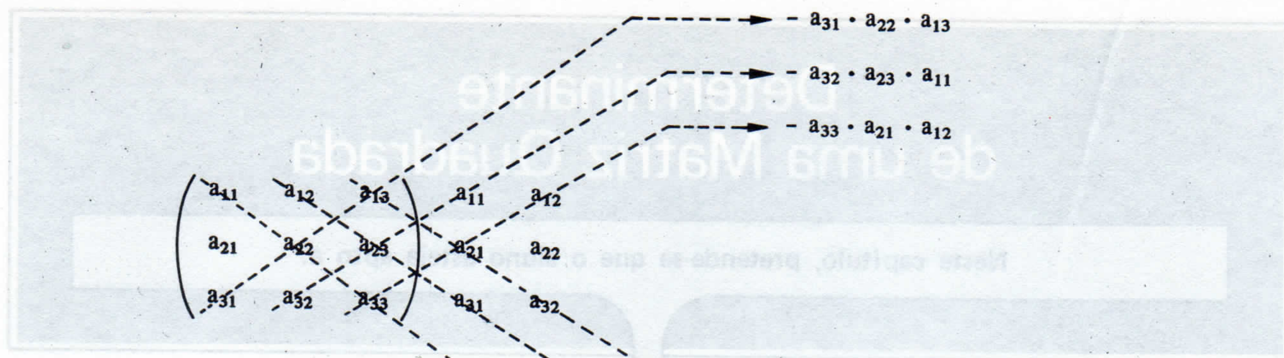
3 – Se M é de ordem 3, ou seja, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, então

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}.$$

42. Para o cálculo do determinante de M, quando M é de ordem 3, existe uma regra prática chamada **regra de Sarrus** que consiste em:

1 – escrever as duas primeiras colunas ao lado da última coluna.

2 – adicionar os produtos obtidos de acordo com o seguinte esquema:



Indicaremos, também, determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

por $\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

3 – se M é uma matriz de ordem 4 ou de ordem maior que 4, o determinante de M é calculado por meio do abaixamento de ordem da matriz, que se faz empregando algumas propriedades que daremos no decorrer do assunto.

43. Aplicação:

1º) **Assinale as afirmações corretas:**

a. (X) $M = (a_{11}) \Longrightarrow \det M = a_{11}$

b. ( ) $M = (a_{11}) \Longrightarrow \det M = -a_{11}$

c. ( ) $M = (3) \Longrightarrow \det M = -3$

d. (X) $M = (3) \Longrightarrow \det M = 3$

e. (X) $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

f. ( ) $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 = -14$

g. (X) $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 14$

h. (X) $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = -2$

i. ( ) $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 2$

j. ( ) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1$

l. (×) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot 1 = 11$

m. ( ) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 0$

n. (×) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 1$

o. (×) $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 0$

p. ( ) $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 1$

q. (×) $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 0$

2º) Calcule os determinantes das matrizes abaixo:

a) $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, então $\det M = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = -12$

b) $M = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -5 \\ 1 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$, então $\det M = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -5 \\ 1 & \frac{9}{4} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} - 1 \cdot (-5) = 3 + 5 = 8$

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, então, pela regra de Sarrus, devemos escrever as duas primeiras colunas ao lado da última coluna, a fim de se obter os produtos para o cálculo do determinante de M. Assim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$- 3 \cdot 1 \cdot (-1) = +3$

$- 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8$

$- 5 \cdot 6 \cdot 2 = -60$

$+ (-1) \cdot 6 \cdot 4 = -24$

$+ 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

$+ 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$

Portanto:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 12 - 24 + 3 - 8 - 60 = -72$$

d) $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Por Sarrus, vem:

$$\left(\begin{matrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{matrix}\right)\begin{matrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{matrix}$$

$- 2 \cdot 1 \cdot (-2) = +4$

$-(-4) \cdot 1 \cdot (-1) = -4$

$- 3 \cdot 0 \cdot 3 = 0$

$+(-2) \cdot 0 \cdot (-4) = 0$

$+ 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

$+(-1) \cdot 1 \cdot 3 = -3$

Portanto:

$$\det M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = +4 - 4 + 0 + 0 + 6 - 3 = 3$$

e) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Por Sarrus, vem:

$$\left(\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$- 1 \cdot 0 \cdot 3 = 0$

$-(-2) \cdot (-1) \cdot 1 = -2$

$- 3 \cdot 2 \cdot (-2) = +12$

$+3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$

$+(-2) \cdot (-1) \cdot 1 = +2$

$+1 \cdot 0 \cdot 3 = 0$

Portanto:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 12 + 2 + 0 = 0$$

3º) Calcule o valor de x, sabendo que $\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 2x & -4 \end{vmatrix} = 0.$

Para isso, calcule o determinante e resolva a equação obtida:

$-4 \cdot (3-x) - 2x \cdot 1 = 0 \iff -12 + 4x - 2x = 0$

$2x = 12$

$x = 6$

Você obteve: x = 6 .

4º) Calcule o valor de x, sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 3 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 5x & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Para isso, calcule o determinante e resolva a equação obtida:

$0 + 0 + 15x^2 - 0 + 5x - x(x-1) = 0$

$15x^2 + 5x - x^2 + x = 0$

$14x^2 + 6x = 0$

$7x^2 + 3x = 0$

$x \cdot (7x + 3) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{7} \end{cases}$

Você obteve: x = 0 ou $x = -\frac{3}{7}$

5º) Calcule o valor de x, sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0.$

Para isso, calcule o determinante e resolva a equação obtida:

$18 + 3x^2 + 4x - 2x^2 - 12 - 9x = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$

Você obteve: x = ...2... ou x = ...3... .

Exercícios a resolver: itens 1 a 3, págs. 76 e 77.

ABAIXAMENTO DA ORDEM DE UMA MATRIZ QUADRADA

44. Complemento algébrico:

Chama-se de **complemento algébrico de um elemento a_{ij}** de uma matriz quadrada M o número real igual ao produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz M_{ij} que se obtém suprimindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz M.

Indicaremos o complemento algébrico de a_{ij} por C_{ij}.

Assim, o complemento algébrico de a_{21} na matriz

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ é } C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det M_{21}, \text{ onde } M_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Portanto, } C_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}) = -a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{13}$$

45. Aplicação:

Sendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, calcule os complementos algébricos que se pedem. Para isso complete:

a) $C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det M_{31}$, onde $M_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

Então, $C_{31} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$

b) $C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det M_{32}$, onde $M_{32} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Então, $C_{32} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3-2) = -1$

c) $C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det M_{22}$, onde $M_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Então, $C_{22} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9$

d) $C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det M_{23}$, onde $M_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Então, $C_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (+2 - 0) = -2$

46. Teorema de Laplace:

"O determinante de uma matriz M é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos complementos algébricos."

Vamos, então, aplicar o Teorema de Laplace para calcular o determinante de uma matriz.

Assim, sendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, calculemos o seu determinante aplicando Laplace para os elementos da 1ª linha:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot C_{11} + 3 \cdot C_{12} + 4 \cdot C_{13} =$$

$$= 2(-1)^{1+1} \cdot \det M_{11} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det M_{12} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det M_{13} =$$

$$= 2(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4(-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (20 - 2) - 3 \cdot (-12 + 4) + 4 \cdot (3 - 10) = 36 + 24 - 28 = 32$$

Então, $\det M = 32$.

47. Aplicação:

Calcule os determinantes das matrizes abaixo aplicando o Teorema de Laplace:

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para maior facilidade aplique Laplace para os elementos da 2ª linha, onde aparecem dois elementos iguais a zero.

Assim, complete:

$\det M = 4 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{22} - 5 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{24}$

$$\det M = 4 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 5 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -4 \cdot (-7) + 5 \cdot (-29) = 28 - 145 = -117$$

b) $M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Para maior facilidade, você vai aplicar Laplace para os elementos da 4ª linha.

Assim, complete:

$\det M = 0 \cdot C_{41} + 0.C_{42} - 4.C_{43} + 0.C_{44} = -4 \cdot C_{43}$

$\det M = -4 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4.(-3).C'_{11} = -12.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= -12(-12+6) = 72$

c) $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Para maior facilidade, você vai aplicar Laplace para os elementos da 1ª coluna.

$\det M = 3.C_{11} + 0.C_{21} + 0.C_{31} + 0.C_{41} + 0.C_{51}$

$\det M = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3.(2.C'_{11} + 1.C'_{13}) = 6.C'_{11} + 3C'_{13} =$

$= 6.(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6(1+16-12+6) +$

$+ 3(8+12-16) = 66 + 12 = 78$

Exercícios a resolver: item 4, pág. 77.

48. Observações:

I — O Teorema de Laplace nos permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n recaindo no cálculo de determinante de matrizes de ordem menor que n.

II – Para maior facilidade de cálculo, deve-se aplicar o Teorema de Laplace aos elementos da linha ou coluna que tem o maior número de zeros.

III – Daremos a seguir o Teorema de Jacobi que nos permitirá obter zeros numa linha ou coluna.

49. Teorema de Jacobi:

"Somando-se aos elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz M uma combinação linear dos elementos respectivos de outras linhas (ou colunas) obteremos uma matriz M' tal que det M = det M'."

Exemplo: Vamos calcular o determinante da matriz M, onde

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

, aplicando antes o Teorema de Jacobi de modo a obter, por exemplo, zeros na 1ª linha.

Para isso:

1 – Vamos somar aos elementos da 1ª linha os respectivos elementos da 3ª linha multiplicados por -2:

$$\det M = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-2\cdot2 & 5-2\cdot4 & 3-2\cdot3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

2 – Vamos somar aos elementos da 2ª coluna os respectivos elementos da 3ª coluna multiplicados por -1:

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3-1\cdot(-3) & -3 \\ 3 & -1-1\cdot4 & 4 \\ 2 & 4-1\cdot3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ e}$$

por Laplace vem:

$$\det M = -3 \cdot C_{13} = -3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(3+10) = -39$$

Observação: poderíamos ter obtido zeros numa outra linha ou coluna qualquer, fazendo outras combinações lineares convenientes.

50. Aplicação:

1º) Seja a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Calcule det M, aplicando antes o Teorema de Jacobi para obter zeros na 1ª coluna, facilitando assim a aplicação do Teorema de Laplace.

Para isso, some aos elementos da 2ª linha os elementos da 1ª linha multiplicados por 2:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2+2\cdot1 & -1+2\cdot2 & 1+2\cdot(-3) \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Agora some aos elementos da 3ª linha os elementos da 1ª linha multiplicados por −3:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 3 - 3 \cdot 1 & 1 - 3 \cdot 2 & -4 - 3 \cdot (-3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

Aplique, então, o Teorema de Laplace, calculando det M:

$$\det M = 1 . C_{11} = 1 . (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

2º) Seja a matriz $M = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ -5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule det M, aplicando antes o Teorema de Jacobi para obter zeros na 3ª linha.

Para isso, some aos elementos da 3ª linha os elementos da 1ª linha multiplicados por 1:

$$\det M = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ -5 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ -5 + 1 \cdot 5 & 8 + 1 \cdot (-3) & 6 + 1 \cdot (-2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Agora some aos elementos da 2ª coluna os elementos da 3ª coluna multiplicados por $-\frac{5}{4}$:

$$\det M = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 - \frac{5}{4} \cdot (-2) & -2 \\ -3 & 2 - \frac{5}{4} \cdot (-4) & -4 \\ 0 & 5 - \frac{5}{4} \cdot 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Aplique, então, o Teorema de Laplace e calcule det M:

$$\det M = 4 . C_{33} = 4 . (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 4\left(35 - \frac{3}{2}\right) = 4 . \frac{67}{2} = 134$$

3º) Sendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 9 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -4 & 8 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, calcule det M.

Para isso, aplique o Teorema de Jacobi para obter zeros na 3ª coluna, fazendo as seguintes combinações lineares:

a) Some aos elementos da 2ª linha os elementos da 1ª linha multiplicados por −3.

b) Some aos elementos da 3ª linha os elementos da 1ª linha multiplicados por 4.

c) Some aos elementos da 4ª linha os elementos da 1ª linha multiplicados por 2.

$$\det M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 9 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -4 & 8 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 2-3(-1) & 9-3.3 & 3-3.1 & -3-3.(-2) \\ 3+4(-1) & -7+4.3 & -4+4.1 & 8+4.(-2) \\ 4+2(-1) & -1+2.3 & -2+2.1 & 2+2.(-2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$ e aplicando o Teorema de Laplace para a 3ª coluna,

vem:

$$\det M = 1.C_{13} = 1.(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -50-15-30 = -95$$

4º) Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, aplique antes o Teorema de Jacobi para obter zeros e calcule det M.

Faremos, por exemplo, as combinações lineares indicadas abaixo, de modo abreviado, para obter zeros na 1ª coluna, assim:

a) 3ª linha + (−2). 1ª linha.

b) 4ª linha + 1. 1ª linha.

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2-2 & -1-4 & 1-0 & 2+2 \\ -1+1 & 0+2 & 3+0 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det M = 1.C_{11} = 1.(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$ e fazendo 2ª linha + 2. 1ª linha

vem:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2.C_{13} = -2.(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2.(-9-10) = 38$$

5º) Calcule o valor de x na igualdade $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x^2 \\ 4 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$

Observe que calculando o determinante pela regra de Sarrus você terá uma equação do 3º grau em x, o que não é muito conveniente. Vamos então procurar calcular os valores de x aplicando as propriedades vistas.

Assim, faça:

a) 3ª linha – 2 · 2ª linha

b) aplique o Teorema de Laplace.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x^2 \\ 4 & 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x^2 \\ 0 & 0 & x-2x^2 \end{vmatrix} = (x-2x^2) \cdot C_{33} = (x-2x^2) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2x^2) \cdot (3x-2) = 0$$

e você pode escrever

$$\begin{cases} x - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x \cdot (1-2x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \text{ou} \\ 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

e $V = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$

Exercícios a resolver: item 5, pág. 77.

51. Regra de Chió: é uma regra prática para fazer sucessivos abaixamentos de ordem de uma matriz para o cálculo do seu determinante.

Essa regra é justificada pelo Teorema de Jacobi e pelo Teorema de Laplace.

Aplica-se a regra de Chió quando se tem um elemento $a_{ij} = 1$, na matriz. Quando não se tem $a_{ij} = 1$ pode-se obtê-lo aplicando o Teorema de Jacobi e propriedades que serão vistas no item 53.

Regra de Chió:

1 – Suprimimos a linha e a coluna que se cruzam no elemento $a_{ij} = 1$.

2 – De cada elemento restante da matriz subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas interseções das perpendiculares traçadas dos elementos considerados à linha e à coluna suprimidas.

3 – Com as diferenças obtidas construímos uma matriz cujo determinante multiplicado por $(-1)^{i+j}$ é igual ao determinante da matriz inicial.

Exemplo: Calcular o det M onde $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 4 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ pela regra de Chió.

Então, $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 4 & 12 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5-2\cdot 3 & 14-2\cdot 5 \\ 12-4\cdot 3 & 6-4\cdot 5 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -14 \end{vmatrix} = 14$

52. **Aplicação:** Calcule o determinante das matrizes abaixo aplicando a regra de Chió:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \\ 4 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

Assim, complete:

$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \\ 4 & 15 & 11 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 10 - 2.3 & 9 - 2.2 \\ 15 - 4.3 & 11 - 4.2 \end{vmatrix} = (-1)^{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 12 - 15 = -3$

b) $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Assim, complete:

$\det M = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 - 3.(-3) & 4 - 2.(-3) \\ 5 - 3.(-2) & -1 - 2.(-2) \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = -89$

c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -3 \\ -1 & 0 & -6 & -2 \\ 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Para isso complete:

$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 & -3 \\ -1 & 0 & -6 & -2 \\ 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 - 2.2 & 7 - 0.2 & -3 - (-1).2 \\ -1 - 2.0 & -6 - 0.0 & -2 - (-1).0 \\ 7 - 2.3 & 2 - 0.3 & 3 - (-1).3 \end{vmatrix} =$

Continue na página seguinte.

$$= (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 7 & -1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 7-2.(-4) & -1-6.(-4) \\ -6-2.(-1) & -2-6.(-1) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 23 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 92 = 152$$

d) $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\det M = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6-(-1).0 & 2-(-2).0 & -3-0.0 \\ 0-(-1).(-3) & 7-(-2).(-3) & -1-0.(-3) \\ -2-(-1).(-1) & -4-(-2).(-1) & 7-0.(-1) \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 7 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6-(-3).2 & -3-(-1).2 \\ -3-(-6).(-3) & 7-(-1).(-6) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ -21 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(12-21) = 9$$

Exercícios a resolver: item 6, pág. 77.

53. Propriedades dos determinantes:

Vamos enunciar aqui algumas propriedades que serão úteis no cálculo de determinantes.

Seja, então, M uma matriz quadrada de ordem **n**. Valem as **propriedades:**

1ª) Se os elementos de uma linha (ou coluna) da matriz M forem todos iguais a zero, então $\det M = 0$.

Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = 0$$

2ª) Se a matriz M tem duas linhas (ou colunas) iguais, então $\det M = 0$.

Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

3ª) Multiplicando-se uma linha (ou coluna) da matriz M por um número real k, o determinante da nova matriz M' é igual ao produto de k pelo det M.

Exemplo:

$$\left.\begin{matrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{e} \\ M' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 20 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \det M' = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \det M$$

4ª) Se a matriz M tem duas linhas (ou duas colunas) formadas por elementos proporcionais, então det M = 0.

Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

5ª) Trocando-se entre si os lugares de duas linhas (ou duas colunas) da matriz M, o determinante da nova matriz é igual ao determinante de M multiplicado por −1.

Exemplo:

$$\left.\begin{matrix} M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \det M' = -\det M$$

6ª) Se a matriz M é tal que cada elemento da i-ésima linha (ou j-ésima coluna) é dado por $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, então o seu determinante é igual à soma do determinante da matriz M' que se obtém substituindo o elemento a_{ij} por b_{ij}, com o determinante da matriz M'' que se obtém substituindo a_{ij} por c_{ij}.

Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3+2 & 4 \\ -1 & -2+5 & 0 \\ 0 & -1+3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = \begin{vmatrix} 2 & 3+2 & 4 \\ -1 & -2+5 & 0 \\ 0 & -1+3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

7ª) Se a matriz M tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então det M = 0

Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ onde a 3ª coluna é igual à soma da 1ª com o dobro da 2ª coluna,

então:

$$\det M = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

54. Aplicação:

1º) Dadas as matrizes abaixo, justifique, pelas propriedades dadas, por que o determinante é nulo:

a) $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -4 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

det M = 0, pois os elementos da 2ª linha são proporcionais aos elementos da 1ª linha (2ª linha = 2.1ª linha).

b) $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

det M = 0, pois os elementos da 4ª linha são nulos.

c) $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

det M = 0, pois os elementos da 1ª coluna são iguais aos elementos da 3ª coluna.

d) $M = \begin{pmatrix} a & 2a+3c & c \\ b & 2b+3d & d \\ c & 2c+3a & a \end{pmatrix}$

det M = 0, pois a 2ª coluna é uma combinação linear da 1ª e 3ª colunas (2.1ª coluna + 3.3ª coluna = 2ª coluna).

e) $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

det M = 0, pois a 4ª coluna é uma combinação linear da 2ª e 3ª colunas (2 . 2ª coluna + 3ª coluna = 4ª coluna).

f) $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & 21 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

det M = 0, pois a 3ª linha e a 1ª linha são proporcionais (1ª linha = 3 . 3ª linha).

g) $M = \begin{pmatrix} 2x & 3x^2 & -x^3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4x & 6x^2 & -2x^3 \end{pmatrix}$

det M = 0, pois a 3ª linha e a 1ª linha são proporcionais (3ª linha = 2 . 1ª linha).

h) $M = \begin{pmatrix} a & c & e & ab \\ c & a & c & bc \\ e & d & b & be \\ b & e & a & b^2 \end{pmatrix}$

det M = 0, pois a 4ª coluna e a 1ª coluna são proporcionais (4ª coluna = b . 1ª coluna).

i) $M = \begin{pmatrix} a+c & b & 1 \\ b+a & c & 1 \\ b+c & a & 1 \end{pmatrix}$, com $(a+b+c) \neq 0$:

det M = 0, pois $\begin{vmatrix} a+c & b & 1 \\ b+a & c & 1 \\ b+c & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & 1 \\ a+b+c & c & 1 \\ a+b+c & a & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}_{=0}$

2º) Sem calcular o valor dos determinantes das matrizes abaixo, mostre que:

a) det M é divisível por 7, onde $M = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 49 & 21 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Para isso, lembrando que quando se multiplica os elementos de uma linha de uma matriz M por k se tem det M' = k · det M, complete:

$$\det M = \begin{vmatrix} 14 & 7 & 49 & 21 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\det M'}$$, isto é:

det M = ..7.. · det M', ou seja, det M é ..divisível.. por 7.

b) det M é divisível por 2, onde $M = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 49 & 21 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Para isso, complete:

$$\det M = \begin{vmatrix} 14 & 7 & 49 & 21 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 7 & 49 & 21 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\det M''}$$, isto é:

det M = ..2.. · det M'', ou seja, det M é ..divisível.. por 2.

c) det M é divisível por 14, onde $M = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 49 & 21 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Para isso, complete:

$$\det M = \begin{vmatrix} 14 & 7 & 49 & 21 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\det M'''}$$

isto é: det M = ..14.. · det M''', ou seja, det M é ..divisível.. por 14.

d) det M é divisível por 30, onde $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 75 \\ 4 & 7 & 20 \end{pmatrix}$

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 75 \\ 4 & 7 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 75 \\ 2 & 7 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 15 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}}_{\det M'} = 30 \det M'$$, portanto det M é divisível por 30.

e) det M é divisível por 10, onde $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Para isso, adicione aos elementos da 1ª coluna os elementos da 2ª coluna multiplicados por 1 e os elementos da 3ª coluna multiplicados por 1, assim:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 10 & 3 & 2 \\ 10 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}_{\det M'}$$, isto é:

$\det M = 10 . \det M'$

ou seja: det M é divisível por 10.

f) det M é divisível por $(a + b + c) \neq 0$, onde $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) . \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}}_{\det M'}$$ isto é:

$\det M = (a+b+c) . \det M'$

ou seja: det M é divisível por (a+b+c).

g) det M é divisível por $(x + 2) \neq 0$, onde $M = \begin{pmatrix} 3x^2 & -12 & 21 \\ x & 2 & 0 \\ -x & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Para isso, complete:

$$\det M = \begin{vmatrix} 3x^2 & -12 & 21 \\ x & 2 & 0 \\ -x & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x^2 & -4 & 7 \\ x & 2 & 0 \\ -x & -2 & 3 \end{vmatrix}$$ e somando aos elementos da 1ª coluna

os elementos da 2ª coluna multiplicados por 1, vem:

$$\det M = 3 \cdot \begin{vmatrix} x^2-4 & -4 & 7 \\ x+2 & 2 & 0 \\ -x-2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} (x+2)\cdot(x-2) & -4 & 7 \\ x+2 & 2 & 0 \\ -(x+2) & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (x+2) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x-2 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}_{\det M'}$$

isto é: $\det M = 3.(x+2).\det M'$

ou seja: det M é divisível por $(x+2)$.

Exercícios a resolver: itens 7 e 8, págs. 77 e 78.

3º) Resolva a equação $\begin{vmatrix} x^2 & -x & 1 \\ 4x & x^2-5 & 0 \\ 4x & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Observe que se desenvolvermos o determinante acima teremos uma equação do 4º grau, o que não é muito conveniente. Vamos então procurar determinar os valores de **x** aplicando as propriedades vistas.

Assim, adicione aos elementos da 1ª coluna os elementos da 2ª coluna multiplicados por 1 e fatore os elementos da 1ª coluna:

$$\begin{vmatrix} x^2-x & -x & 1 \\ x^2+4x-5 & x^2-5 & 0 \\ 4x-4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x(x-1) & -x & 1 \\ (x+5)(x-1) & x^2-5 & 0 \\ 4(x-1) & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Veja, $x = 1$ é uma **solução**, pois para $x = 1$ todos os elementos da 1ª coluna são nulos e portanto o determinante é nulo.

Se $x \neq 1$, então você pode escrever:

$$\begin{vmatrix} x(x-1) & -x & 1 \\ (x+5)\cdot(x-1) & x^2-5 & 0 \\ 4(x-1) & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & -x & 1 \\ x+5 & x^2-5 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

e sendo $x \neq 1$, você tem $\begin{vmatrix} x & -x & 1 \\ x+5 & x^2-5 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Adicione à 2ª coluna os elementos da 1ª coluna multiplicados por 1 e aplique o Teorema de Laplace:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x+5 & x^2+x & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff (-1)^4 \cdot (x^2+x) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot (x+1)(2x - 4) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x+1 = 0 \iff x = -1 \\ \text{ou} \\ 2x-4 = 0 \iff x = 2 \end{cases}$$

Portanto: $V = \{-1, 0, 1, 2\}$

4º) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 6x & -2x & 2 \\ -9x & x^2 & 4 \\ x^2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Para isso, complete:

a) O valor $x = 0$ é solução, pois se $x = 0$ os elementos da 1ª coluna se anulam e, portanto, o determinante é nulo .

b) Se $x \neq 0$, então você pode escrever:

$$\begin{vmatrix} 6x & -2x & 2 \\ -9x & x^2 & 4 \\ x^2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff x \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2x & 2 \\ -9 & x^2 & 4 \\ x & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} 6 & -2x & 2 \\ -9 & x^2 & 4 \\ x & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Somando aos elementos da 1ª coluna os elementos da 2ª coluna multiplicados por 1 e fatorando vem:

$$\begin{vmatrix} 6-2x & -2x & 2 \\ -9+x^2 & x^2 & 4 \\ x-3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} -2 \cdot (x-3) & -2x & 2 \\ (x+3) \cdot (x-3) & x^2 & 4 \\ (x-3) & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

e portanto $x = 3$ é outra solução, pois para $x = 3$ os elementos da 1ª coluna se anulam e o determinante é nulo.

c) Se $x \neq 3$, então você pode escrever:

$$\begin{vmatrix} -2 \cdot (x-3) & -2x & 2 \\ (x+3) \cdot (x-3) & x^2 & 4 \\ (x-3) & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff (x-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2x & 2 \\ x+3 & x^2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} -2 & -2x & 2 \\ x+3 & x^2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Somando aos elementos da 1ª coluna os elementos da 3ª coluna multiplicados por 1 e aplicando o Teorema de Laplace, vem:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2x & 2 \\ x+3 & x^2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & -2x & 2 \\ x+7 & x^2 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (-1)^{2+1} \cdot (x+7) \cdot \begin{vmatrix} -2x & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

e portanto $-(x+7) \cdot (2x+6) = 0 \implies \begin{cases} x+7=0 \implies x = -7 \\ \text{ou} \\ 2x+6 = 0 \implies x = -3 \end{cases}$

Você obteve $V = \{-7, -3, 0, 3\}$

Exercícios a resolver: item 9, pág. 78.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Calcule os determinantes abaixo:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{vmatrix}$

2) Calcule os determinantes abaixo, aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

3) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x+3 & 4 \\ 4 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2x-3 & x+5 \\ -3x & x+1 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} -2x & 2 \\ -5x & x+4 \end{vmatrix} = 0$

e) $\begin{vmatrix} -2x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2x-5 & -1 & 1 \\ 2 & x+2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x+3 \\ 0 & 2 & x^2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2$

h) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & x+2 \\ 2 & x-1 & 0 \end{vmatrix} = -48$

4) **Calcule os determinantes abaixo, pelo Teorema de Laplace:**

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & -1 & 5 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 6 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

5) **Calcule os determinantes abaixo, aplicando antes o Teorema de Jacobi para obter zeros:**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

6) **Calcule os determinantes abaixo, aplicando a regra de Chió:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 18 & 12 \\ 3 & 10 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 10 & -3 & -15 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -4 & 11 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 10 & -6 & 9 & 2 \\ -3 & 11 & -9 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 & 13 \\ 5 & -4 & 6 & 20 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

7) **Justifique por que os determinantes das matrizes abaixo são nulos:**

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -21 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 1 \\ 14 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -3x^2 & 2x & x^3 \\ x^2 & -2x & 3x^3 \\ -5x^2 & 2x & -x^3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -x & -2x+3 & 3 & 0 \\ x & 2x-1 & 2 & -3 \\ -x & -2x+1 & -1 & 2 \\ x & 2x+5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

8) Sem calcular o determinante das matrizes abaixo, mostre que:

a) Sendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, o det M é divisível por 2.

b) Sendo $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \\ -5 & 30 & 15 \end{pmatrix}$, o det M é divisível por 30.

c) Sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 21 & 24 & 9 \end{pmatrix}$, o det M é divisível por 9.

d) Sendo $M = \begin{pmatrix} a & a & c \\ c & a & a \\ a & c & a \end{pmatrix}$, o det M é divisível por $(2a + c)$, com $2a \neq -c$.

e) Sendo $M = \begin{pmatrix} x & -2 & 2 \\ 3x^2 & -12 & 1 \\ -4 & 2x & 0 \end{pmatrix}$, o det M é divisível por $(x - 2)$, com $x \neq 2$.

f) Sendo $M = \begin{pmatrix} -3x^3 & 2-3x & 8x^2 \\ 3x^2 & x^2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, o det M é divisível por $(x - 1)$, com $x \neq 1$.

9) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 & 5 \\ x & x & -3 \\ x & x & x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3x+2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x^2-4 & 2x^2 & 2 \\ 3x-6 & 8 & 1 \\ 2-x & 16 & 2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 3x^3-6x & -21x & 0 \\ -15 & -5x & -1 \\ 2x+4 & 8x+26 & 2 \end{vmatrix} = 0$

RESPOSTAS

1) a) 7
b) −14
c) 32
d) 5
e) −5
f) 0

2) a) 3
b) −46
c) 7
d) −7
e) 18
f) 0
g) 0

3) a) 3
b) ± 5
c) $-3; \frac{1}{5}$
d) 0; 1
e) $\frac{4}{11}$
f) $\frac{24}{13}$
g) −4; 2
h) −5; 4

4) a) 32
b) 16
c) 51
d) 176
e) 57
f) −228

5) a) 44
b) −156
c) −14
d) −448

6) a) 7
b) −16
c) −1
d) 126
e) −90
f) −36

7) a) 3ª coluna = 0
b) 1ª linha = 3ª linha
c) 7 • 3ª coluna = 1ª coluna
d) 3ª linha = 1ª linha + 2ª linha
e) 2 • 1ª linha + 2ª linha = 3ª linha
f) 2 • 1ª linha + 2ª linha = 3ª linha
g) 2 • 1ª coluna + 3ª coluna + 4ª coluna = 2ª coluna

9) a) −3; 0; 2
b) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 6
c) $-\sqrt{8}$; 2; $\sqrt{8}$
d) −3; 0; 3; 13

SEQÜÊNCIA B

1) Determine, quando existirem, as matrizes inversas das matrizes seguintes:
Observação: uma matriz A é inversível se existe uma matriz B tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

onde I é a matriz identidade. A matriz B recebe o nome de **matriz inversa de A** e é indicada por A^{-1}.
Vale a afirmação: "Uma matriz A é inversível se e somente se det A ≠ 0".

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Sugestão: Calcule det A e resolva a equação:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\nexists\ D^{-1}$

e) $E = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $E^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2) Determine k, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ seja inversível. $K \neq -6$

3) Para que valores de m a matriz $\begin{pmatrix} m & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ é inversível?

$m \neq 15$

4) Mostre que são nulos os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & x & 3a+5x \\ b & y & 3b+5y \\ c & z & 3c+5z \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix}$, com x + y + z = 0

c) $\begin{vmatrix} a & 3a+x & 1 \\ b & 3b+x & 1 \\ c & 3c+x & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & \text{sen}^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \text{sen}^2\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \text{sen}^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

5) Sendo $\begin{vmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{vmatrix} = k$, calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3x & m & a \\ 3y & n & b \\ 3z & p & c \end{vmatrix} = -3K$

b) $\begin{vmatrix} -5x & m & 2a \\ -5z & p & 2c \\ -5y & n & 2b \end{vmatrix} = -10K$

6) Mostre que $\begin{vmatrix} x & a & m & n \\ x & x & b & p \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c)$

7) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & x+6 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ $\{-\sqrt{11}; \sqrt{11}\}$

b) $\begin{vmatrix} \log_x 16 & \log_x 2 & \log_x 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ $\{4\}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x+3 \end{vmatrix} = 0$ $\{-1, 6, 2\}$

d) $\begin{vmatrix} \log_x 2 & 1 \\ \log_2 x & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

8) Determine os valores de x para os quais o determinante abaixo é nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & x-1 & 6 \\ 4 & 6 & 13 & 3 \\ 5 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Sugestão: 3ª coluna = 1ª coluna + 2ª coluna + + 4ª coluna; x = 8

9) Mostre que $\begin{vmatrix} a & a+m & a+3m \\ b & b+n & b+3n \\ c & c+t & c+3t \end{vmatrix} = 0$

10) Calcule os determinantes de Vandermonde:

Obs.: Determinante de Vandermonde é todo determinante associado à matriz de ordem **n** onde cada coluna é formada de potências de mesma base com expoente variando de 0 a n − 1. Os elementos da 2ª linha se chamam elementos característicos e vale a propriedade: "o determinante de Vandermonde é igual ao produto de todas as diferenças entre os elementos característicos onde o índice que indica a coluna em cada minuendo é maior que o índice correspondente de cada subtraendo".

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} =$$

$= (d-a) \cdot (d-b) \cdot (d-c) \cdot (c-a) \cdot (c-b) \cdot (b-a)$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ = 2

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 25 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ = −6

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ = 20

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 & 16 \\ -8 & 27 & -1 & 64 \end{vmatrix}$ = −600

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 5 & \log 50 & \log 500 \\ (\log 5)^2 & (\log 50)^2 & (\log 500)^2 \end{vmatrix}$ = 2

11) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & x \\ 25 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ $V = \{5, 3\}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2x & 3x \\ x^2 & 4x^2 & 9x^2 \end{vmatrix} = 16$ $V = \{2\}$

12) Calcule o valor do determinante abaixo, sendo a_1, a_2, a_3 e a_4 os 4 primeiros termos de uma P.A. de razão k:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = 12k^6$$

Sistemas Lineares

Neste capítulo, pretende-se que o aluno esteja apto a:

a) resolver sistemas de n *equações a* n *incógnitas por meio de determinantes.*
b) discutir a existência de soluções desses sistemas.

EQUAÇÃO LINEAR

55. Definição:

Chama-se **equação linear a** n **incógnitas** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ toda equação da forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$$

onde $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}$ são números reais chamados **coeficientes** e **b** é um número real chamado **termo independente.**

56. A solução de uma equação linear a n incógnitas é a ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que verifica a igualdade $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$.

57. Assim, assinale as afirmações corretas:

a. (X) $3x + 4y = 2$ é uma equação linear nas incógnitas x e y.
b. ( ) $3x^2 + 4y = 2$ é uma equação linear nas incógnitas x e y.
c. (X) $3x + 2y - 5z = 0$ é uma equação linear nas incógnitas x, y e z.
d. ( ) $3x + 2y - 5z = 0$ tem coeficientes 3, 2 e −5 e o termo independente é 3.
e. (X) $3x + 2y - 5z = 0$ tem coeficientes 3, 2 e −5 e o termo independente é zero.
f. (X) $-3x + 2y = -8$ é uma equação linear nas incógnitas x e y cujos coeficientes são −3, 2 e o termo independente é −8.
g. (X) (0, −4) é solução da equação linear $-3x + 2y = -8$.
h. ( ) (0, 0) é solução da equação linear $-3x + 2y = -8$.
i. ( ) (0, −10) é solução da equação linear $-3x + 2y = -8$.
j. (X) (2, −1) é solução da equação linear $-3x + 2y = -8$.
l. ( ) (2, −2) é solução da equação linear $-3x + 2y = -8$.
m. (X) $(-2, -7), (3, \frac{1}{2}), (4, 2)$ também são soluções de $-3x + 2y = -8$.
n. (X) a equação linear $-3x + 2y = -8$ tem infinitas soluções.

o. (X) $-2x + y - 3z + w = 3$ é uma equação linear nas incógnitas x, y, z e w cujos coeficientes são -2, 1, -3 e 1 e o termo independente é 3.

p. ( ) $-2x + y - 3y + w = 3$ é uma equação linear cujos coeficientes são -2, 1, +3 e zero.

q. (X) (0, 2, 1, 4) é uma das soluções da equação linear $-2x + y - 3z + w = 3$.

SISTEMAS LINEARES

58. Definição:

Chama-se **sistema linear** a um conjunto de **m** equações lineares a **n** incógnitas.

Assim:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de **m** equações a **n** incógnitas.

Uma ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é **solução** desse sistema se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ for solução das **m** equações do sistema.

Se o sistema tiver **uma única solução**, diremos que é um **sistema determinado.**

Se o sistema tiver **mais de uma solução**, diremos que é um **sistema indeterminado.**

Se o sistema **não tiver solução**, diremos que é um **sistema impossível.**

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ é um sistema linear de 2 equações a 2 incógnitas e (2, 0) é solução desse sistema. Esse **sistema** é **determinado**, pois tem uma única solução.

b) $\begin{cases} 3x - y + z = -2 \\ -2x + 2y - z = 3 \end{cases}$ é um sistema linear de 2 equações a 3 incógnitas e (1, 0, -5), (0, 1, -1), (2, -1, -9) etc. são soluções desse sistema. Esse sistema é indeterminado, pois tem mais de uma solução.

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$ é um sistema linear de 2 equações a duas incógnitas. Esse sistema é impossível, pois não tem solução.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

59. Estudaremos apenas a resolução de sistemas lineares onde o número de equações é igual ao número de incógnitas. Esse estudo poderá ser feito através de matrizes ou através de determinantes.

Nos limitaremos apenas ao estudo da resolução de sistemas pelos determinantes.

Assim, seja o sistema
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

60. A resolução desse sistema se faz através de uma regra prática chamada **regra de Cramer**, que consiste em:

1 – Calcula-se o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2 – Se $\Delta \neq 0$, o sistema é **determinado**, isto é, admite uma única solução dada por:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

onde:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

ou seja, Δ_{x_i} é o determinante da matriz que se obtém substituindo-se a coluna coeficiente x_i pelos respectivos termos independentes das equações.

Portanto, a ênupla $\left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}\right)$ é a solução do sistema.

3 – Se $\Delta = 0$ e **todos os Δ_{x_i} forem nulos,** o sistema é **indeterminado**. As infinitas soluções podem ser obtidas em função de uma das incógnitas.

4 – Se $\Delta = 0$ e **existir pelo menos um Δ_{x_i} diferente de zero,** o sistema é **impossível.**

61. Aplicação:

1º) Resolva o sistema $\begin{cases} x - 3y + z = -4 \\ 2x + y - 2z = 11 \\ -x + 2y - 5z = 15 \end{cases}$

Para isso, complete e calcule:

a) O determinante Δ da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -32$$

b) $\Delta = -32 \neq 0$, então o sistema é determinado.

O sistema admite uma única solução, dada por $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ e $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Então, sendo:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 11 & 1 & -2 \\ 15 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ -5 & -13 & -5 \end{vmatrix} = -64$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 11 & -2 \\ -1 & 15 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 19 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \end{vmatrix} = -32$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 11 \\ -1 & 2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 19 \\ -1 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 96$$

vem: $x = \frac{-64}{-32} = 2$, $y = \frac{-32}{-32} = 1$ e $z = \frac{96}{-32} = -3$

Portanto, a solução do sistema é (2, 1, -3).

2º) Resolva o sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = -7 \\ 5x + y + 5z = 9 \end{cases}$

Para isso, complete e calcule:

a) O determinante Δ da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -2 \\ 10 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 67$$

b) $\Delta = 67 \neq 0$, então o sistema é determinado.

O sistema admite uma única solução, dada por $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ e $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -7 & 3 & -2 \\ 9 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -11 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 11 - 11 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -7 & -2 \\ 5 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \\ -10 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -77 + 10 = -67$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & 25 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 44 \end{vmatrix} = -(-484 + 350) = +134$$

$x = \dfrac{0}{67} = 0$, $y = \dfrac{-67}{67} = -1$ e $z = \dfrac{134}{67} = 2$

Portanto, a solução do sistema é (0 , -1 , 2).

39) Resolva o sistema $\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 \\ -2x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -1 \end{cases}$

Para isso, complete e calcule:

a) O determinante Δ da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -10 \\ 3 & -7 & 14 \end{vmatrix} = 70 - 70 = 0$$

b) Como Δ = 0, o sistema pode ser indeterminado ou impossível, conforme os valores dos determinantes Δ_x, Δ_y e Δ_z.

Assim:

Se Δ = 0 e todos os Δ_{x_i} forem nulos, o sistema é indeterminado .

Se Δ = 0 e pelo menos um Δ_{x_i} diferente de zero, o sistema é impossível .

Então:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-10+10) = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -10 \\ 3 & -7 & 14 \end{vmatrix} = 70 - 70 = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 3 & -7 & -7 \end{vmatrix} = -35 + 35 = 0$$

Como Δ = 0 e todos os $\Delta_{x_i} = 0$, o sistema é indeterminado .

c) Vamos portanto calcular as infinitas soluções em função de uma das incógnitas, por exemplo z, tomando-se duas equações quaisquer do sistema dado, formando um novo sistema, como se segue:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 2 \\ -2x - y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 + 6z \\ -2x - y = 1 - 2z \end{cases}$$

Resolvendo esse novo sistema, vem:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5$$

$$\Delta'_x = \begin{vmatrix} 2 + 6z & 3 \\ 1 - 2z & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6z - 3 + 6z = -5 + 0z = -5$$

$$\Delta'_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 + 6z \\ -2 & 1 - 2z \end{vmatrix} = 1 - 2z + 4 + 12z = 5 + 10z$$

$$x = \frac{\Delta'_x}{\Delta'} = \frac{-5}{5} = -1 \quad , \quad y = \frac{\Delta'_y}{\Delta'} = \frac{5 + 10z}{5} = 1 + 2z$$

As infinitas soluções do sistema são dadas por $(-1, 1 + 2z, z)$ quando se atribuem valores quaisquer para z.

4º) Resolva o sistema $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x - 7y + 7z = 0 \end{cases}$

Para isso, complete e calcule:

a) O determinante Δ da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 25 & -26 \\ 0 & 25 & -26 \\ 1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

b) Como $\Delta = 0$, o sistema pode ser indeterminado ou impossível, conforme os valores dos determinantes Δ_x, Δ_y e Δ_z.

Assim:

Se $\Delta = 0$ e todos os Δ_{x_i} forem nulos, o sistema é indeterminado.

Se $\Delta = 0$ e pelo menos um $\Delta_{x_i} \neq 0$, o sistema é impossível.

Então:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Como $\Delta = 0$ e todos os $\Delta_{x_i} = 0$, o sistema é indeterminado.

c) As infinitas soluções em função de uma incógnita, por exemplo x, tomando-se duas equações quaisquer, são dadas pela resolução do novo sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 5z = -3x \\ -3y + 2z = -4x \end{cases}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7, \quad \Delta'_y = \begin{vmatrix} -3x & -5 \\ -4x & 2 \end{vmatrix} = -6x - 20x = -26x,$$

$$\Delta_z' = \begin{vmatrix} 4 & -3x \\ -3 & -4x \end{vmatrix} = -16x - 9x = -25x \quad \text{e} \quad y = \frac{-26x}{-7} = \frac{26x}{7} \quad z = \frac{-25x}{-7} = \frac{25x}{7}$$

As infinitas soluções são dadas por $(x, \frac{26x}{7}, \frac{25x}{7})$ quando se atribuem valores quaisquer para x.

5º) Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$

Para isso, complete e calcule:

a) O determinante Δ da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

b) Como Δ = 0, o sistema pode ser indeterminado ou impossível, conforme os valores dos determinantes Δ_x, Δ_y e Δ_z.

Assim:

Se Δ = 0 e todos os Δ_{x_i} forem nulos, o sistema é indeterminado.

Se Δ = 0 e pelo menos um Δ_{x_i} diferente de zero, o sistema é impossível.

Então:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Como existe $\Delta_y \neq 0$, podemos afirmar que o sistema é impossível.

Exercícios a resolver: item 1, pág. 89.

6º) No sistema $\begin{cases} ax + 2y + z = -1 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ 3x + z = 2 \end{cases}$ determine o valor de a de modo que o sistema seja determinado.

Para isso, complete e calcule:

a) O determinante Δ da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-3 & 2 & 1 \\ -11 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 3 + 22 = a + 19$$

b) O sistema é determinado para Δ $\neq 0$.

Então, para $a + 19 \neq 0 \Rightarrow a \neq -19$ e o sistema é determinado.

7º) Determine **a** e **b** de modo que o sistema $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4ax - by = 2 \end{cases}$ seja indeterminado.

Para isso, complete e calcule:

a) O sistema é indeterminado se $\Delta = 0$ e todos os $\Delta_{x_i} = 0$, isto é, $\Delta_x = 0$ e $\Delta_y = 0$.

b) $\Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4a & -b \end{vmatrix} = -2b + 4a = 0$, logo $b = 2a$.

$\Delta_x = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -b \end{vmatrix} = b + 2 = 0$, logo $b = -2$ e portanto $a = -1$.

$\Delta_y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4a & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4a = 0$, logo $a = -1$ e portanto $b = -2$.

Então, o sistema é indeterminado para $a = -1$ e $b = -2$.

8º) Discuta o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = a \\ -y + 2z = b \end{cases}$

Para isso, complete e calcule:

a) O sistema é determinado se $\Delta \neq 0$.
O sistema é indeterminado se $\Delta = 0$ e todos os $\Delta_{x_i} = 0$.
O sistema é impossível se $\Delta = 0$ e pelo menos um $\Delta_{x_i} \neq 0$.

b) $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-2) = 0$$

Como $\Delta = 0$, o sistema pode ser indeterminado ou impossível, conforme os valores dos determinantes Δ_x, Δ_y e Δ_z.

c) $$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ a & 4 & -3 \\ b & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ a & -5 & -3 \\ b & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1(5a + 5b) = -5a - 5b$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & a & -3 \\ 0 & b & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & a & -3 \\ 4 & b & 2 \end{vmatrix} = -1(-4b - 4a) = 4b + 4a$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & a \\ 0 & -1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & b \end{vmatrix} = 2(b+a) = 2a + 2b$$

d) Como $\Delta = 0$, o sistema será indeterminado se $\Delta_x = 0$ e $\Delta_y = 0$ e $\Delta_z = 0$.

Portanto: $\Delta_x = -5a - 5b = 0 \Longrightarrow a = -b$

$\Delta_y = 4b + 4a = 0 \Longrightarrow a = -b$

$\Delta_z = 2a + 2b = 0 \Longrightarrow a = -b$

e) Como $\Delta = 0$, o sistema será impossível se $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ ou $\Delta_z \neq 0$.

Portanto: $\Delta_x = -5a - 5b \neq 0 \Longrightarrow a \neq -b$

ou $\Delta_y = 4b + 4a \neq 0 \Longrightarrow a \neq -b$

ou $\Delta_z = 2a + 2b \neq 0 \Longrightarrow a \neq -b$

f) Então, o sistema é indeterminado para $a = -b$ e é impossível para $a \neq -b$.

Exercícios a resolver: itens 2, 3, e 4, págs. 89 a 90.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Resolva os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 3x - 2y + 5z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 3z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + y - z = 5 \\ -x - 2y + z = -3 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x + y - z = 5 \\ -x - 2y + z = -3 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 2z - w = 4 \\ 2y + z + 3w = -5 \\ -x + w = -2 \\ x - 3y + 2w = 11 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -12 \\ -x + 2y - 2z = 6 \\ x - y - z = -6 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 4x + 7y + 9z = 12 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ x + y + 3z = 9 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \end{cases}$

o) $\begin{cases} -2x + 3y + z = 5 \\ 4x - 2y = 0 \\ 2x - 3y - z = -5 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ x - 14z = 0 \end{cases}$

2) Determine a e b de modo que seja indeterminado o sistema

$\begin{cases} 2x + 2y = b \\ 3x + ay = 6 \end{cases}$

3) Determine k de modo que seja impossível o sistema

$\begin{cases} x + 2y - 3z = k \\ 3x - y + z = 1 \\ -2x - 4y + 6z = 4 \end{cases}$

4) Discuta os sistemas seguintes, de acordo com os valores de seus parâmetros:

a) $\begin{cases} x + my = 2 \\ 2x + 4y = m^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 1 \\ 4x + 10y + 2z = 5 \\ 6x + 15y - z = k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + ay + z + w = 1 \\ x + y + az + w = 1 \\ x + y + z + aw = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + z = p \\ y + z = 100 \\ -mx + z = 80 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y - mz = -1 \\ 3x - y + z = 4 \\ -2x + 4y - 2z = k \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + ay + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = b \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \\ 6x - 8y + pz = q \end{cases}$

RESPOSTAS

1) a) $V = \{(-1, 3, 2)\}$

b) $V = \{(3, 0, -2)\}$

c) $V = \{(-1, 2, 0)\}$

d) $V = \{(0, 1, 0)\}$

e) $V = \{(-1, 2, 0)\}$

f) $V = \{(0, 0, 0)\}$

g) $V = \{(2, -3, 1, 0)\}$

h) $V = \emptyset$, sistema impossível

i) $V = \emptyset$, sistema impossível

j) $V = \emptyset$, sistema impossível

l) $V = \{(4z - 6, 3z, z)\}$

m) $V = \{(17 - 4z, z - 8, z)\}$

n) $V = \{(2 - z, 2 - z, z)\}$

o) $V = \{(\frac{5-z}{4}, \frac{5-z}{2}, z)\}$

p) $V = \{(14z, -9z, z)\}$

2) $a = 3$ e $b = 4$

3) $k \neq -2$

4)

a) $m \neq 2 \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema possível e determinado
$m = 2 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado

b) como $\Delta = 0$, para $k \neq 6 \Rightarrow \Delta_{x_i} \neq 0$ ∴
∴ sistema impossível
como $\Delta = 0$, para $k = 6 \Rightarrow \Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado

c) $a \neq 1 \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema determinado
$a = 1 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado

d) $m \neq 0$ e $m \neq 1 \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema possível e determinado
$m = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\exists\, \Delta_{x_i} \neq 0$ ∴
∴ sistema impossível
$m = 1 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado

e) $a \neq 1$ e $a \neq -2 \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema possível e determinado
$a = 1 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado
$a = -2 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\exists\, \Delta_{x_i} \neq 0$ ∴
∴ sistema impossível

f) $m \neq -1 \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema possível e determinado
$m = -1$ e $p = 80 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado
$m = -1$ e $p \neq 80 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\exists\, \Delta_{x_i} \neq 0$ ∴
∴ sistema impossível

g) $m \neq \frac{3}{5} \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema possível e determinado
$m = \frac{3}{5}$ e $k \neq -6 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\exists\, \Delta_{x_i} \neq 0$ ∴
∴ sistema impossível
$m = \frac{3}{5}$ e $k = -6 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado

h) $a \neq -2 \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema possível e determinado
$a = -2$ e $b \neq 5 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\exists\, \Delta_{x_i} \neq 0$ ∴
∴ sistema impossível
$a = -2$ e $b = 5 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado

i) $p \neq 10 \Rightarrow \Delta \neq 0$ ∴
∴ sistema possível e determinado
$p = 10$ e $q \neq -12 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\exists\, \Delta_{x_i} \neq 0$ ∴
∴ sistema impossível
$p = 10$ e $q = -12 \Rightarrow \Delta = 0$ e $\Delta_{x_i} = 0$ ∴
∴ sistema indeterminado

Análise Combinatória

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) se familiarize com as técnicas de cálculo com fatorial de um número.
b) esteja apto a resolver os problemas da análise combinatória (permutações, combinações e arranjos) através da resolução de um único problema fundamental.
c) adquira as técnicas e habilidade necessárias à resolução desses problemas.

FATORIAL

62. Definição:

Seja n um número natural maior que 1.

Chama-se **n fatorial** ou **fatorial de n** e se indica **n!** o produto dos **n** números naturais consecutivos de 1 a n.

Assim:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

ou

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por convenção: $0! = 1$ e $1! = 1$

63. Aplicação:

1º) Assinale as afirmações corretas:

a. (×) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b. ( ) $4! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

c. (×) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

d. (×) $9! = 8! \cdot 9$

e. ( ) $9! = 8! \cdot 7$

f. (X) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5!$

g. (X) $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$

h. (X) $\frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6$

i. ( ) $\frac{7!}{5!} = 6$

j. (X) $\frac{13!}{10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!}$

l. ( ) $\frac{13!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$

m. (X) $\frac{13!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11$

n. (X) $\frac{9!}{12!} = \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 10}$

o. ( ) $\frac{9!}{12!} = \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}$

p. (X) $10! = \frac{11!}{11}$

q. (X) $(n-3)! = (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

r. (X) $2n! = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

s. (X) $(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$

t. (X) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!}$

2º) Complete:

a) $\frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 15 . 14 = 210$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = n.(n-1) = n^2 - n$

c) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1).2n.(2n-1)!}{(2n-1)!} = (2n+1).2n = 4n^2+2n$

d) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!} = \frac{(n-3)!}{(n-1).(n-2).(n-3)!} = \frac{1}{(n-1).(n-2)} = \frac{1}{n^2-3n+2}$

e) $\frac{2n!}{(2n-2)!} = \frac{2n.(2n-1).(2n-2)!}{(2n-2)!} = 2n.(2n-1) = 4n^2-2n$

f) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = (n+1).n.(n-1) = n^3-n$

g) $\frac{n \cdot (n-4)!}{n!} = \frac{n.(n-4)!}{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)!} = \frac{1}{(n-1).(n-2).(n-3)}$

h) $n! + (n-1)! = \ldots \cdot (n-1) + (n-1)! = (n-1)!(n+1)$

i) $(n+1)! + (n-1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)! + (n-1)! = (n-1)! \cdot [(n+1).n+1] = (n-1)!(n^2+n+1)$

j) $(n+3)! - n \cdot (n+2)! = (n+3) \cdot (n+2)! - n \cdot (n+2)! = (n+2)! [(n+3)-n] = (n+2)!.3$

l) $2n \cdot (n+1)! - n! = 2n.(n+1).n! - n! = n! [2n.(n+1)-1] = n!(2n^2+2n-1)$

Exercícios a resolver: itens 1 e 2, pág. 106.

PROBLEMAS DE CONTAGEM

64. O objetivo da Análise Combinatória, neste volume, é **contar de quantos modos se pode escrever um conjunto E, com n elementos distintos ou não, mudando a ordem de seus elementos.**

Em particular, poderá interessar:

I – Contar o número de subconjuntos de um conjunto E', com n elementos distintos, que se pode escrever com x elementos ($x < n$) tais que dois desses subconjuntos se diferenciem pelo menos por um de seus elementos.

II – Contar o número de subconjuntos de E' que se pode escrever com x elementos ($x < n$) tais que dois desses subconjuntos se diferenciem pelo menos por um elemento ou pela ordem desses elementos.

65. Veja, não está nos interessando escrever todos esses conjuntos mas sim saber o número deles.

Enquanto que na Teoria dos Conjuntos vimos que num conjunto não se repetem elementos e que dois conjuntos não se diferenciam pela ordem de seus elementos, aqui, no problema da contagem, os conjuntos podem ter elementos repetidos e dois deles podem se diferenciar pela ordem de seus elementos.

66. Conjunto Depósito

Definiremos **conjunto depósito** como sendo o conjunto cujos elementos estão agrupados de acordo com uma característica comum.

Esses agrupamentos serão chamados **celas**, isto é, **cela é um agrupamento de elementos que têm uma mesma característica.**

Por exemplo, consideremos o conjunto formado pelas letras da palavra ESCREVER, que será indicado por:

E = {E, S, C, R, V} (na Teoria dos Conjuntos) e por $E = \{(E)_3, (S)_1, (C)_1, (R)_2, (V)_1\}$ **(conjunto depósito),**

onde $(E)_3$ é a cela da letra E, com 3 elementos
$(S)_1$ é a cela da letra S, com 1 elemento
$(C)_1$ é a cela da letra C, com 1 elemento
$(R)_2$ é a cela da letra R, com 2 elementos
$(V)_1$ é a cela da letra V, com 1 elemento
e $3 + 1 + 1 + 2 + 1 = 8$ é o número de letras da palavra ESCREVER.

67. Complete você, escrevendo o conjunto depósito em cada uma das situações abaixo:

a) Da palavra ARARA:

$E = \{(A)_3, (R)_2\}$, onde 3 + 2 = 5 é o número de elementos de E.

b) Da palavra MATEMÁTICA:

$E = \{(M)_2, (A)_3, (T)_2, (E)_1, (I)_1, (C)_1\}$ onde 2+3+2+1+1+1 = 10
é o número de elementos de E.

c) Da palavra BARCO:

$E = \{(B)_1, (A)_1, (R)_1, (C)_1, (O)_1\}$, onde 1+1+1+1+1 = 5
é o número de elementos de E.

d) Do número 3532:

$E = \{(3)_2, (5)_1, (2)_1\}$, onde $2+1+1 = 4$ é o número de elementos de E.

e) Do número 454524:

$E = \{(4)_3, (5)_2, (2)_1\}$, onde $3+2+1 = 6$ é o número de elementos de E.

f) Quando com 17 alunos se deseja formar uma equipe de 5 alunos de todos os modos possíveis:

Neste caso, os alunos deverão ser agrupados de acordo com as características: **participam** da equipe (P) e **não participam** da equipe (N).

Assim:

$E = \{(P)_5, (N)_{12}\}$, onde $5 + 12 = 17$ é o número de elementos do conjunto E.

g) Quando com 21 alunos se deseja formar equipes de 6 alunos de todos os modos possíveis:

$E = \{(P)_6, (N)_{15}\}$, onde $6 + 15 = 21$ é o número de elementos de E.

h) Quando com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7 se deseja formar números com 3 algarismos:

Neste caso, como o valor relativo de um algarismo varia conforme a sua posição, teremos um algarismo com a característica **unidade (U)**, um algarismo com a característica **dezena (D)** e um algarismo com a característica **centena (C)** formando o número, e dois algarismos que **não participarão (N)** desse número.

Portanto: $E = \{(C)_1, (D)_1, (U)_1, (N)_2\}$, onde $1+1+1+2 = 5$ é o número de elementos de E.

i) Quando com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 7 se deseja formar números com 2 algarismos:

$E = \{(D)_1, (U)_1, (N)_4\}$, onde $1+1+4 = 6$ é o número de elementos de E.

CONTAGEM DAS DIFERENTES MANEIRAS DE SE ESCREVER UM CONJUNTO MUDANDO A ORDEM DE SEUS ELEMENTOS

Seja o conjunto $E = \{a_1, a_2, ..., a_x, b_1, b_2, ..., b_y, ..., p_1, p_2, ..., p_z\}$ ou

$E = \{(A)_x, (B)_y, ..., (P)_z\}$

onde $x + y + ... + z = n$ e A é a característica comum dos elementos $a_1, a_2, ..., a_x$

B é a característica comum dos elementos $b_1, b_2, ... b_y$ etc.

P é a característica comum dos elementos $p_1, p_2, ..., p_z$.

68. O número de maneiras diferentes de se escrever o conjunto E mudando a ordem de seus elementos é dado pela relação:

$$\binom{n}{x, y \dots z} = \frac{n!}{x!\, y! \dots z!}$$

69. Esse número obtido por essa relação nada mais é do que o obtido pela contagem das bijeções de $F = \{1, 2, ... n\}$ em $E = \{(A)_x, (B)_y, ..., (P)_z\}$, onde $x + y + ... + z = n$, observando que contar as **diferentes maneiras** de se escrever o conjunto E é contar o número de bijeções de F em E com a **convenção de que bijeções que trocam imagens de uma mesma cela serão contadas uma só vez**, pois os conjuntos imagens ordenados obtidos são os mesmos.

70. Observe os exemplos:

1º exemplo: Seja o conjunto E o conjunto da palavra A M E, isto é,

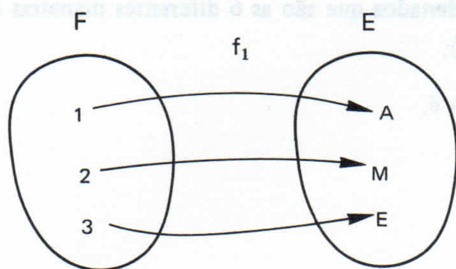
$E = \{A, M, E\} = \{(A)_1, (M)_1, (E)_1\}$, onde $1 + 1 + 1 = 3$.

O número de maneiras de se escrever o conjunto E dado por

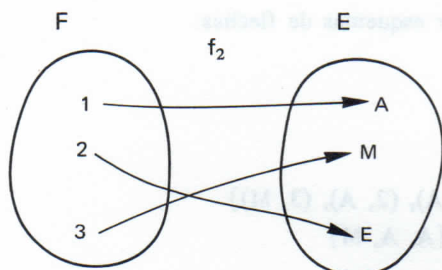
$$\binom{n}{x, y \ldots z} = \frac{n!}{x!\,y! \ldots z!} \quad \text{é} \quad \binom{3}{1, 1, 1} = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

Esse número 6 é também obtido pela contagem das bijeções de $F = \{1, 2, 3\}$ em E.

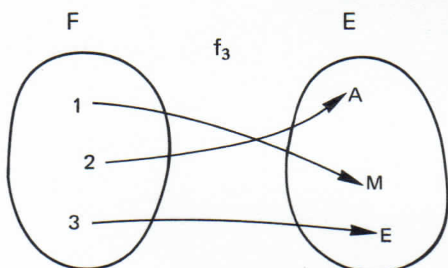
De fato, representemos as bijeções de F em E por esquemas de flechas:



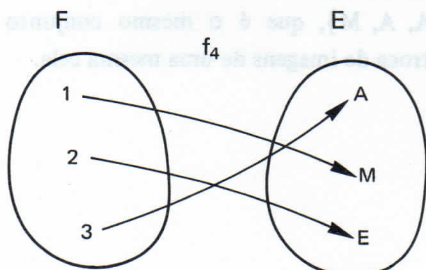
e $f_1 = \{(1, A), (2, M), (3, E)\}$
$Im(f_1) = \{A, M, E\}$



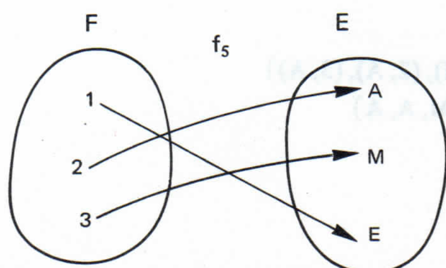
$f_2 = \{(1, A), (2, E), (3, M)\}$
$Im(f_2) = \{A, E, M\}$



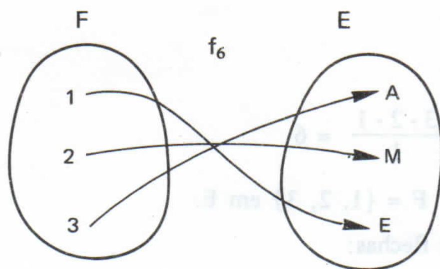
$f_3 = \{(1, M), (2, A), (3, E)\}$
$Im(f_3) = \{M, A, E\}$



$f_4 = \{(1, M), (2, E), (3, A)\}$
$Im(f_4) = \{M, E, A\}$



$f_5 = \{(1, E), (2, A), (3, M)\}$
$Im(f_5) = \{E, A, M\}$



$f_6 = \{(1, E), (2, M), (3, A)\}$
$Im(f_6) = \{E, M, A\}$

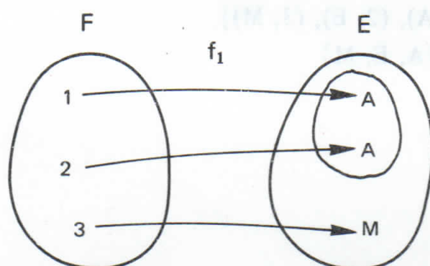
Portanto, temos 6 bijeções que nos dão 6 conjuntos imagens ordenados que são as 6 diferentes maneiras de se escrever o conjunto $E = \{A, M, E\}$ ou $E = \{(A)_1, (M)_1, (E)_1\}$.

2º **exemplo**: Seja o conjunto das letras da palavra A M A, isto é, $E = \{A, M, A\}$ ou $E = \{(A)_2, (M)_1\}$, onde $2 + 1 = 3$.

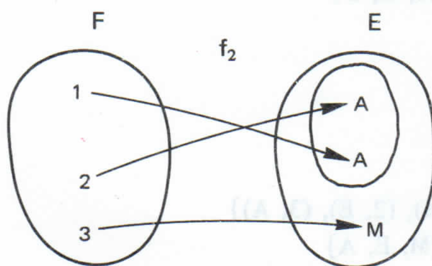
O número de maneiras de se escrever o conjunto E dado por

$$\binom{n}{x, y \ldots z} = \frac{n!}{x!\, y! \ldots z!} \quad \text{é} \quad \binom{3}{2, 1} = \frac{3!}{2!\, 1!} = 3$$

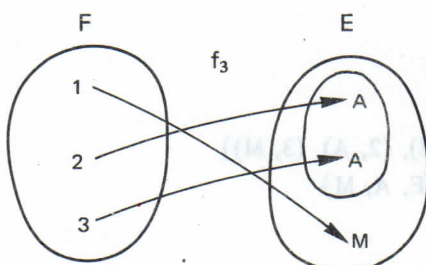
De fato, representemos as bijeções de $F = \{1, 2, 3\}$ em E por esquemas de flechas:



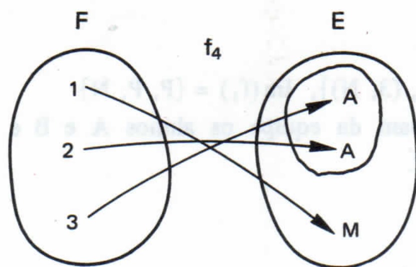
$f_1 = \{(1, A), (2, A), (3, M)\}$
e $Im(f_1) = \{A, A, M\}$



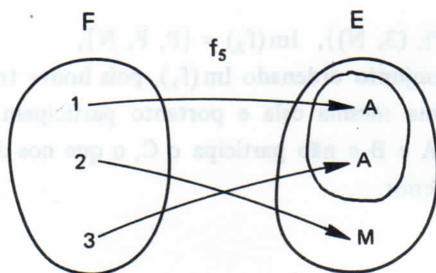
$f_2 = \{(1, A), (2, A), (3, M)\}$
e $Im(f_2) = \{A, A, M\}$, que é o mesmo conjunto $Im(f_1)$, pois houve troca de imagens de uma mesma cela.



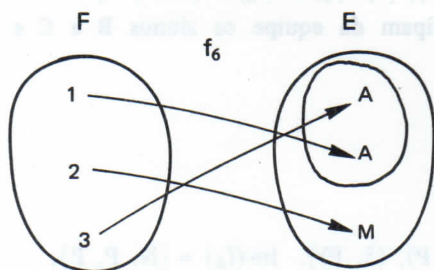
$f_3 = \{(1, M), (2, A), (3, A)\}$
e $Im(f_3) = \{M, A, A\}$



$f_4 = \{(1, M), (2, A), (3, A)\}$
e $Im(f_4) = \{M, A, A\}$, que é igual ao conjunto $Im(f_3)$, pois houve troca de imagens de uma mesma cela.



$f_5 = \{(1, A), (2, M), (3, A)\}$
e $Im(f_5) = \{A, M, A\}$



$f_6 = \{(1, A), (2, M), (3, A)\}$
e $Im(f_6) = \{A, M, A\}$, que é igual ao conjunto $Im(f_5)$, pois houve troca de imagens de uma mesma cela.

Portanto, temos 6 bijeções, isto é, 6 conjuntos imagens ordenados que nos deram 3 **modos de se escrever o conjunto E.**

Por esse motivo convencionamos que bijeções que trocam apenas imagens de uma mesma cela serão contadas uma só vez, pois os conjuntos imagens ordenados obtidos são o mesmo.

3º exemplo: Com 3 alunos, A, B e C, deseja-se formar uma equipe de 2 alunos. De quantos modos podemos formar essa equipe?

Para resolver esse problema, vamos dar ao aluno A a ficha [1], ao aluno B a ficha [2] e ao aluno C a ficha [3], e vamos agrupar os alunos de acordo com as características: **participam da equipe (P), não participam da equipe (N).**

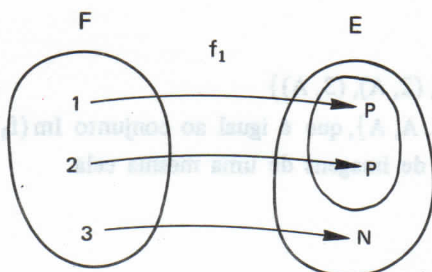
Assim: a cela (P) tem 2 alunos.
a cela (N) tem 1 aluno.
o conjunto depósito é $E = \{(P)_2, (N)_1\}$, onde $2 + 1 = 3$.

O número de modos de se formar a equipe dado por

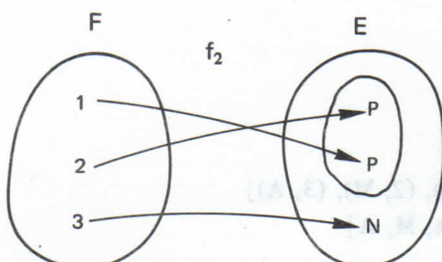
$$\binom{n}{x, y \ldots z} = \frac{n!}{x!\, y! \ldots z!} \quad \text{é} \quad \binom{3}{2, 1} = \frac{3!}{2!\, 1!} = 3,$$

que é também o número de maneiras diferentes de se escrever o conjunto E e também o número de bijeções de $F = \{1, 2, 3\}$ em E, com a convenção adotada.

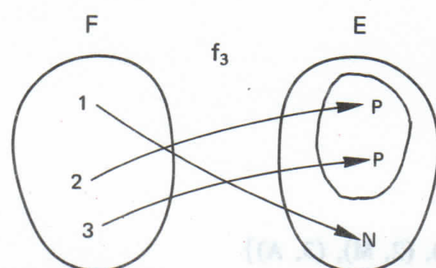
De fato, representemos essas bijeções por esquemas de flechas:



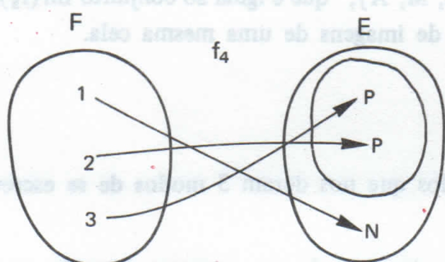
$f_1 = \{(1, P), (2, P), (3, N)\}$, $Im(f_1) = \{P, P, N\}$ e portanto participam da equipe os alunos A e B e não participa o aluno C.



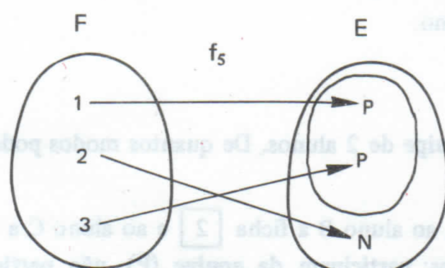
$f_2 = \{(1, P), (2, P), (3, N)\}$, $Im(f_2) = \{P, P, N\}$, que é o mesmo conjunto ordenado $Im(f_1)$, pois houve troca de imagens de uma mesma cela e portanto participam da equipe os alunos A e B e não participa o C, o que nos dá a mesma equipe anterior.



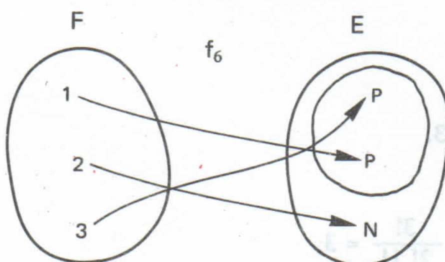
$f_3 = \{(1, N), (2, P), (3, P)\}, Im(f_3) = \{N, P, P\}$ e portanto participam da equipe os alunos B e C e não participa A.



$f_4 = \{(1, N), (2, P), (3, P)\}$, $Im(f_4) = \{N, P, P\}$, que é o mesmo conjunto ordenado $Im(f_3)$, pois houve troca de imagens de uma mesma cela e portanto participam da equipe os alunos B e C e não participa A, o que nos dá a mesma equipe anterior.



$f_5 = \{(1, P), (2, N), (3, P)\}, Im(f_5) = \{P, N, P\}$ e portanto participam da equipe os alunos A e C e não participa B.



$f_6 = \{(1, P), (2, N), (3, P)\}$, $Im(f_6) = \{P, N, P\}$, que é o mesmo conjunto ordenado $Im(f_5)$, pois houve troca de imagens de uma mesma cela e portanto participam da equipe os alunos A e C e não participa B, o que nos dá a mesma equipe anterior.

Portanto, pela convenção adotada, das 6 bijeções serão contadas apenas 3 bijeções e portanto 3 modos diferentes de se escrever o conjunto E ou 3 modos diferentes de se formar uma equipe de 2 alunos.

71. Aplicação:

1º) Quantos anagramas podemos escrever com as letras da palavra RETA (isto é, de quantos modos se pode escrever o conjunto das letras da palavra RETA)?

Então:

a cela (R), da letra R, tem 1 elemento
a cela (E), da letra E, tem 1 elemento
a cela (T), da letra T, tem 1 elemento
a cela (A), da letra A, tem 1 elemento

o conjunto depósito associado é $E = \{(R)_1, (E)_1, (T)_1, (A)_1\}$, onde 1 + 1 + 1 + 1 = 4, que é o número de letras da palavra RETA.

O número de anagramas dado por

$$\binom{n}{x, y \dots z} = \frac{n!}{x!\, y! \dots z!} \quad \text{é} \quad \binom{4}{1, 1, 1, 1} = \frac{4!}{1!1!1!1!} = 24$$

2º) Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Então:

a cela (A), da letra A, tem 3 elementos
a cela (R), da letra R, tem 2 elementos

o conjunto depósito associado é $E = \{(A)_3, (R)_2\}$, onde 3 + 2 = 5, que é o número de letras da palavra ARARA.

O número de anagramas dado por

$$\binom{n}{x, y \dots z} = \frac{n!}{x!\, y! \dots z!} \quad \text{é} \quad \binom{5}{3, 2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4}{2} = 10$$

3º) De quantos modos podemos formar uma equipe de 8 alunos numa classe de 12 alunos?

Então:

a cela (P), dos que participam da equipe, tem 8 alunos
a cela (N), dos que não participam da equipe, tem 4 alunos
o conjunto depósito é $E = \{(P)_8, (N)_4\}$, onde 8 + 4 = 12, que é o número de alunos.

O número de modos de se formar as equipes dado por

$$\binom{n}{x, y \dots z} = \frac{n!}{x!\,y! \dots z!} \quad \text{é} \quad \binom{12}{8, 4} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12.11.10.9}{4.3.2.1} = 495$$

4º) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar usando os algarismos 1, 2, 3, 5, 9?

Então:

cada número tem 3 algarismos.

a cela (U), da unidade, tem 1 algarismo
a cela (D), da dezena, tem 1 algarismo
a cela (C), da centena, tem 1 algarismo
a cela (N), dos que não participam, tem 2 algarismos

o conjunto depósito associado é $E = \{(C)_1, (D)_1, (U)_1, (N)_2\}$, onde 1 + 1 + 1 + 2 = 5.

O total de números de 3 algarismos que podemos formar usando os algarismos 1, 2, 3, 5, 9 dado por

$$\binom{n}{x, y \dots z} = \frac{n!}{x!\,y! \dots z!} \quad \text{é} \quad \binom{5}{1, 1, 1, 2} = \frac{5!}{1!1!1!2!} = 5.4.3 = 60$$

5º) Quantos são os anagramas da palavra LIVRO que começam com a letra L?

Como cada anagrama começa com a letra L, basta calcular o número de modos de se escrever o conjunto {I, V, R, O}.

Então:

a cela (I), da letra I, tem 1 elemento
a cela (V), da letra V, tem 1 elemento
a cela (R), da letra R, tem 1 elemento
a cela (O), da letra O, tem 1 elemento

o conjunto depósito associado é E = {(I)$_1$, (V)$_1$, (R)$_1$, (O)$_1$ }, onde 1+1+1+1 = 4.

O número de anagramas que começam com a letra L dado por

$$\binom{n}{x, y \dots z} = \frac{n!}{x!\, y! \dots z!} \quad \text{é} \quad \binom{4}{1, 1, 1, 1} = \frac{4!}{1!1!1!1!} = 24$$

6º) Quantos são os anagramas da palavra LIVRO que começam com uma consoante?

Cada anagrama deverá começar com a consoante L ou V ou R .

Assim:

Começando com a consoante L, temos:

E = {(I)$_1$, (V)$_1$, (R)$_1$, (O)$_1$} e o número é $\binom{4}{1, 1, 1, 1} = 4! = 24$

Começando com a consoante V, temos:

E = {(L)$_1$, (I)$_1$, (R)$_1$, (O)$_1$} e o número é $\binom{4}{1, 1, 1, 1} = 4! = 24$

Começando com a consoante R, temos:

E = {(L)$_1$, (I)$_1$, (V)$_1$, (O)$_1$} e o número é $\binom{4}{1, 1, 1, 1} = 4! = 24$

Portanto, o número de anagramas que começam com uma consoante (L ou V ou R) é 3 · 24 = 72

7º) Considere a palavra PAPAI e calcule:

a) Quantos são os anagramas dessa palavra?
b) Quantos são os anagramas que começam com a letra I?
c) Quantos são os anagramas que começam com a letra A?
d) Quantos são os anagramas que terminam em PI?
e) Quantos são os anagramas nos quais as letras PI, nessa ordem, aparecem juntas?

Assim, resolvendo, você tem:

a) O conjunto depósito associado é: E = {(P)$_2$, (A)$_2$, (I)$_1$}, onde 2 + 2 + 1 = 5.

O número de anagramas é $\binom{5}{2, 2, 1} = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30$

b) O conjunto depósito associado é: E = {(P)$_2$, (A)$_2$}, onde 2 + 2 = 4.

O número de anagramas é $\binom{4}{2, 2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

c) O conjunto depósito associado é: E = {(P)$_2$, (A)$_1$, (I)$_1$}, onde 2 + 1 + 1 = 4.

O número de anagramas é $\left(\begin{matrix} 4 \\ 2,\ 1,\ 1 \end{matrix}\right) = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 4 \cdot 3 = 12$

d) O conjunto depósito associado é: $E = \{(P)_1, (A)_2\}$, onde $1 + 2 = 3$.

O número de anagramas é $\left(\begin{matrix} 3 \\ 1,\ 2 \end{matrix}\right) = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$

e) Pelo item anterior, os anagramas que terminam em PI são 3.

Observe que PI, nessa ordem e juntas, podem vir **também** no começo do anagrama ou entre as letras P, A, A da palavra PAPAI. Assim, o número de anagramas será 4 • 3, pois PI pode ocupar 4 lugares diferentes em cada anagrama do item anterior.

Temos portanto 12 anagramas onde as letras PI aparecem juntas nesta ordem

8º) Quantos são os anagramas da palavra NIVEA que começam com consoante e terminam em vogal?

Cada anagrama deverá começar com N ou V e terminar com I ou E ou A.

Os anagramas que começam por exemplo com N e terminam com A são calculados associando o conjunto depósito $E = \{(I)_1, (V)_1, (E)_1\}$, onde $1 + 1 + 1 = 3$

e o número de anagramas é $\left(\begin{matrix} 3 \\ 1,\ 1,\ 1 \end{matrix}\right) = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$

Como temos 2 consoantes e 3 vogais, o total de anagramas que começam por consoante e terminam por vogal é 2 • 3 = 6 vezes o número acima,

ou seja, $2 \cdot 3 \cdot \left(\begin{matrix} 3 \\ 1,\ 1,\ 1 \end{matrix}\right) = 36$

9º) Quantos números pares de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 7 e 9?

Usando esses algarismos, os números pares terminam em 2 ou 4, isto é, o algarismo das unidades deve sempre ser 2 ou 4.

Calculemos, então, o total dos primeiros pares que terminam em 2, restando os algarismos 1, 3, 4, 7 e 9 para compormos os números.

Então:

a cela (D), da dezena, tem 1 algarismo
a cela (C), da centena, tem 1 algarismo
a cela (M), da unidade de milhar, tem 1 algarismo
a cela (N), dos que não participam, tem 2 algarismos

e o conjunto depósito associado é $E = \{(M)_1, (C)_1, (D)_1, (N)_2\}$,

onde $1 + 1 + 1 + 2 = 5$.

O total de números pares que terminam em 2 é

$$\left(\begin{matrix} 5 \\ 1,\ 1,\ 1,\ 2 \end{matrix}\right) = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Observe que o total de números pares que terminam em 4 é também 60.

Portanto, o total de números pares de 4 algarismos que podemos formar com os algarismos dados é $2 \cdot 60 = 120$.

10º) Quantos números de 3 algarismos distint.. podemos formar usando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Para isso complete:

cada número tem ..3.. algarismos

a cela (U), da unidade, tem ..1.. algarismo

a cela (D), da dezena, tem ..1.. algarismo

a cela (C), da centena, tem ..1.. algarismo

a cela (N), dos algarismos que não participam, tem ..3.. algarismos

o conjunto depósito associado é $E = \{(C)_1, (D)_1, (U)_1, (N)_3\}$, onde $1 + 1 + 1 + 3 = 6$.

O total é $\begin{pmatrix} 6 \\ 1, 1, 1, 3 \end{pmatrix} = \dfrac{6!}{1!\,1!\,1!\,3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Observe que nesse total estão incluídos os números com o algarismo **0** (zero) na centena e portanto são números de 2 algarismos que devem ser excluídos desse total.

Assim, vamos calcular quantos são os números que têm o algarismo zero na centena. Fixado o zero, restam os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 e o conjunto depósito associado é $E = \{(D)_1, (U)_1, (N)_3\}$, onde $1 + 1 + 3 = 5$

e o número é $\begin{pmatrix} 5 \\ 1, 1, 3 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{1!\,1!\,3!} = 5 \cdot 4 = 20$

Portanto, o total de números com 3 algarismos é $120 - 20 = 100$.

Observação: esse problema poderá ser resolvido calculando-se o total de números de 3 algarismos quando se fixa para o algarismo da centena qualquer algarismo diferente de zero e multiplicando-se o resultado obtido por 5.

11º) Entre 9 pessoas, de quantos modos podemos formar uma comissão de 4 membros, onde uma delas ocupa o cargo de presidente e uma outra o cargo de secretário?

Assim:

a cela (Pr), do presidente, tem ..1.. pessoa

a cela (S), do secretário, tem ..1.. pessoa

a cela (P), dos outros participantes, tem ..2.. pessoas

a cela (N), dos que não participam, tem ..5.. pessoas

o conjunto depósito associado é $E = \{(Pr)_1, (S)_1, (P)_2, (N)_5\}$, onde $1 + 1 + 2 + 5 = 9$.

O número de modos de se formar a comissão é

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 1, 1, 2, 5 \end{pmatrix} = \frac{9!}{1!\,1!\,2!\,5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 1512$$

12º) De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 5 pessoas com 5 rapazes e 7 moças de modo que:

a) na comissão haja **pelo menos** um rapaz.

b) na comissão haja **apenas** dois rapazes.

c) na comissão haja no **máximo** dois rapazes.

Assim, resolvendo vem:

a) Devemos calcular o total de modos de formar comissão de 5 pessoas com as 12 pessoas e desse total retirar o número da comissão composta só de moças.

Assim, você tem 12 pessoas e:

a cela (P), dos participantes, tem 5 pessoas
a cela (N), dos não participantes, tem 7 pessoas
o conjunto depósito é $E = \{(P)_5, (N)_7\}$, onde $5 + 7 = 12$

o número é $\binom{12}{5,\,7} = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2} = 792$

Desse total devemos tirar o número de modos de se formar uma comissão de 5 moças, pois nela haverá zero rapaz.

Assim, você tem 7 moças e:

a cela (P), dos participantes, tem 5 moças
a cela (N), dos não participantes, tem 2 moças
o conjunto depósito associado é $E = \{(P)_5, (N)_2\}$, onde $5 + 2 = 7$

o número é $\binom{7}{5,\,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7.6}{2} = 21$

Portanto, o número de modos de se formar uma comissão onde haja pelo menos um rapaz é 792 − 21 = 771.

b) Como queremos uma comissão de 5 pessoas onde haja apenas 2 rapazes, teremos a comissão formada sempre por 2 rapazes e 3 moças.

Devemos então calcular:

I – o número de modos de se escolher 2 dos 5 rapazes:
a cela (P), dos que participam, tem 2 rapazes
a cela (N), dos que não participam, tem 3 rapazes
o conjunto depósito associado é $E = \{(P)_2, (N)_3\}$, onde $2 + 3 = 5$

o número é $\binom{5}{2,\,3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4}{2} = 10$

II – o número de modos de se escolher 3 das 7 moças:
a cela (P), das que participam, tem 3 moças
a cela (N), das que não participam, tem 4 moças
o conjunto depósito associado é $E = \{(P)_3, (N)_4\}$, onde $3 + 4 = 7$

o número é $\binom{7}{3,\,4} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7.6.5}{3.2} = 35$

III – cada uma das 10 maneiras de se escolher 2 rapazes deve ser completada com 3 moças que podem ser escolhidas de 35 maneiras diferentes.

Portanto, o número de modos de se formar uma comissão de 5 pessoas onde haja apenas 2 rapazes será o produto $10 \cdot 35 = 350$.

c) Como queremos formar uma comissão de 5 pessoas onde haja no máximo 2 rapazes, teremos comissões formadas por 0 (zero) rapazes e 5 moças ou 1 rapaz e 4 moças ou ainda 2 rapazes e 3 moças, cujo cálculo se faz como no item b.

Assim, devemos calcular:

I – o número de modos de se formar uma comissão com zero rapazes e 5 moças, ou seja, comissão de 5 moças:

o total de moças é ..7..

a cela (P), das participantes, tem ..5.. moças

a cela (N), das não participantes, tem ..2.. moças

o conjunto depósito associado é $E = \{(P)_5, (N)_2\}$ e $5 + 2 = 7$

o número é $\binom{7}{5,\ 2} = \dfrac{7!}{5!\,2!} = \dfrac{7 \cdot 6^3}{2} = 21$

II – o número de modos de se formar uma comissão com 1 rapaz e 4 moças:

o total de rapazes é ..5.. e o total de moças é ..7..

a cela (P), dos rapazes participantes, tem ..1.. rapaz

a cela (N), dos rapazes não participantes, tem ..4.. rapazes

a cela (P), das moças participantes, tem ..4.. moças

a cela (N), das moças não participantes, tem ..3.. moças

Os conjuntos depósitos associados são:

$E = \{(P)_1, (N)_4\}$, onde $1 + 4 = 5$

$E' = \{(P)_4, (N)_3\}$, onde $4 + 3 = 7$

o número é $\binom{5}{1,\ 4} \cdot \binom{7}{4,\ 3} = \dfrac{5!}{1!\,4!} \cdot \dfrac{7!}{4!\,3!} = 5 \cdot \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 175$

III – o número de modos de se formar uma comissão com 2 rapazes e 3 moças:

a cela (P), dos rapazes participantes, tem ..2.. rapazes

a cela (N), dos rapazes não participantes, tem ..3.. rapazes

a cela (P), das moças participantes, tem ..3.. moças

a cela (N), das moças não participantes, tem ..4.. moças

os conjuntos depósitos associados são:

$E = \{(P)_2, (N)_3\}$, onde $2 + 3 = 5$

$E' = \{(P)_3, (N)_4\}$, onde $3 + 4 = 7$

o número é $\binom{5}{2,\ 3} \cdot \binom{7}{3,\ 4} = \dfrac{5!}{2!\,3!} \cdot \dfrac{7!}{3!\,4!} = 350$

Portanto, o número total de modos de se formar uma comissão onde haja no máximo 2 rapazes é dado pela soma 21 + 175 + 350 = ..546.. .

13º) De quantas maneiras podemos dispor 10 pessoas em 3 salas A, B e C de modo que:

a) 5 pessoas fiquem na sala A, 3 pessoas na sala B e 2 pessoas na sala C.

b) 5 pessoas fiquem numa das salas, 3 pessoas em outra e 2 em outra sala indistintamente.

Assim, resolvendo vem:

a) a cela (A), das pessoas que ocuparão a sala A, tem ..5.. pessoas

a cela (B), das pessoas que ocuparão a sala B, tem ..3.. pessoas

a cela (C), das pessoas que ocuparão a sala C, tem ..2.. pessoas

o conjunto depósito associado é $E = \{(A)_5, (B)_3, (C)_2\}$, onde $5 + 3 + 2 = 10$

o número é $\binom{10}{5,\ 3,\ 2} = \dfrac{10!}{5!\,3!\,2!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8^4 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2520$

b) Pelo problema anterior, colocando-se 5 pessoas na sala A, 3 na sala B e 2 na sala C temos um total de 2520 modos.

Como queremos colocar 5 pessoas numa sala, 3 na outra e 2 na outra, indistintamente, devemos calcular o **número de modos de se escolher as 3 salas A, B e C.**

Assim, $E = \{(A)_1, (B)_1, (C)_1\}$ e o número é $\binom{3}{1, 1, 1} = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6$

Portanto, o número total de modos de dispor as 10 pessoas, 5 numa das salas, 3 em outra e 2 em outra, indistintamente, é

$6 \cdot 2520 = 15120$, isto é, $\binom{3}{1, 1, 1} \cdot \binom{10}{5, 3, 2} = 15120.$

14º) Sejam duas retas r e s paralelas. Quantos triângulos se pode construir considerando 5 pontos distintos pertencentes à reta r e 8 pontos distintos à reta s?

I – Cálculo do número de modos de se agrupar 3 pontos dos 5 + 8 = 13 pontos:

Assim:

a cela (P), dos que participam, tem ...3... pontos
a cela (N), dos que não participam, tem ...10... pontos

o conjunto depósito associado é $E = \{(\,P\,)_3, (\,N\,)_{10}\}$, onde ...3... + ...10... = 13

o número é $\binom{13}{3,\ 10} = \frac{13!}{3!\,10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$

II – Nesse total estão incluídos os agrupamentos de 3 pontos alinhados das retas r e s que não formam triângulos. Portanto, devemos calcular o número desses agrupamentos e tirá-los do total 286.

Assim:

a cela (P), dos pontos da reta r que participam, tem ...3... pontos
a cela (N), dos pontos da reta r que não participam, tem ...2... pontos
a cela (P), dos pontos da reta s que participam, tem ...3... pontos
a cela (N), dos pontos da reta s que não participam, tem ...5... pontos

os conjuntos depósitos são:

$E = \{(\,P\,)_3, (\,N\,)_2\}$, onde ...3... + ...2... = 5

e

$E' = \{(\,P\,)_3, (\,N\,)_5\}$, onde ...3... + ...5... = 8

o número é $\binom{5}{3,\ 2} + \binom{8}{3,\ 5} = \frac{5!}{3!\,2!} + \frac{8!}{3!\,5!} = 10 + 56 = 66$

Portanto, o número de triângulos que se pode construir é 286 − 66 = 220 triângulos

Exercícios a resolver: itens 3 a 25, págs. 106 e 107.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Simplifique e calcule:

a) $\dfrac{18!}{20!}$

b) $\dfrac{15!\,7!}{5!\,14!}$

c) $\dfrac{3!\,12!}{11!\,4!}$

d) $\dfrac{15! - 13!}{13 \cdot 12!}$

e) $\dfrac{18! + 17!\,3}{17! - 16!\,10}$

f) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$

g) $\dfrac{n!}{n \cdot (n-2)!}$

h) $\dfrac{5!\,(n+1)!}{(n+2)!\,4!}$

i) $n! + (n+1)!$

j) $2n! - (2n+1)!$

l) $\dfrac{(3n-2)!\,n - (3n-1)!\,n}{(3n-1)!}$

m) $\dfrac{2n! - (2n+1)!}{2n!}$

n) $\dfrac{(n+4)! - (n+2)!\,12}{n+7}$

o) $\dfrac{(m+1)! + m!}{m! + (m-1)!\,2}$

2) Mostre que:

a) $\dfrac{(n!)^2}{(n-1)!} + n! = (n+1)!$

b) $\dfrac{(m+1)! - (m-1)!\,6}{(m-1)\left[(m-1)! - (m-2)!\right]} = m + 3$

3) Considere a palavra JESUÍTA e calcule:

a) o total de anagramas que podemos escrever.
b) o número de anagramas que começam por J.
c) o número de anagramas que começam por consoante.
d) o número de anagramas que começam por consoante e que terminam por vogal.
e) o número de anagramas onde as letras I, T, A aparecem juntas nessa ordem.
f) o número de anagramas onde as letras I, T, A aparecem juntas em qualquer ordem.

4) Considere a palavra CICLO e calcule:

a) o total de anagramas que podemos escrever.
b) o número de anagramas que começam por consoante.
c) o número de anagramas que começam por consoante e terminam por consoante.
d) o número de anagramas onde as letras C, I, C aparecem juntas nessa ordem.
e) o número de anagramas onde as letras C, I, C aparecem juntas em qualquer ordem.

5) Considere a palavra BARRACA e calcule:

a) o total de anagramas que podemos escrever.
b) o número de anagramas que começam por vogal e terminam por vogal.
c) o número de anagramas onde as letras A, R, C, A aparecem juntas, nessa ordem.

6) Calcule o total de números de 2 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 1, 3, 4 e 5.

7) Calcule quantos números de 4 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8.

8) Calcule quantos números de 5 algarismos podemos escrever com os algarismos 2, 4, 5, 7, sabendo que o 4 ocupa duas posições em cada número.

9) Calcule o total de números ímpares de 3 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 9.

10) Calcule o total de números de 4 algarismos distintos que podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 5 e 8.

11) Quantos números maiores que 1000 podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

12) Num jogo, um jogador recebe 3 cartas de um baralho de 52 cartas. De quantos modos diferentes ele pode receber o seu jogo?

13) Calcule de quantos modos se pode formar uma equipe de 5 alunos numa classe com 9 alunos.

14) Uma firma possui 12 corretores. Calcule de quantos modos se pode formar uma comissão de 10 corretores.

15) No escritório de uma firma trabalham 12 pessoas. Calcule de quantos modos podemos formar:

a) uma comissão de 6 pessoas.
b) uma comissão de 3 pessoas onde uma delas ocupe o cargo de presidente, outra de secretário e outra de tesoureiro.
c) uma comissão de 5 pessoas onde uma delas ocupe o cargo de presidente, outra de secretário e outras 3 pessoas quaisquer.

16) Numa classe com 8 rapazes e 5 moças, calcule de quantos modos se pode formar uma comissão de 5 pessoas onde um rapaz ocupe o cargo de presidente, um rapaz ocupe o cargo de secretário e 3 outras pessoas quaisquer.

17) Numa reunião compareceram 5 rapazes e 7 moças. Calcule de quantos modos podemos formar:

a) uma comissão de 5 pessoas, de modo que 2 sejam rapazes.
b) uma comissão de 5 pessoas, de modo que pelo menos 1 seja rapaz.
c) uma comissão de 4 pessoas com pelo menos 2 rapazes.
d) uma comissão de 5 pessoas, onde no máximo 3 são moças.

18) De quantos modos podemos dispor 12 alunos em três equipes A, B e C de modo que:

a) 5 participem da equipe A, 4 da equipe B e 3 da equipe C.
b) 5 participem de uma das equipes A, B ou C, 4 de outra e 3 de outra indistintamente?

19) Sejam duas retas r e s paralelas e 6 pontos pertencentes a r e 10 pontos pertencentes a s. Calcule o número de triângulos que podemos formar com esses pontos.

20) Considere um triângulo, 3 pontos num dos lados, 4 pontos no outro lado e 5 pontos em outro lado, todos distintos dos vértices. Calcule o número de triângulos que podemos formar com vértices nesses pontos.

21. Considere 15 pontos distintos de uma circunferência e calcule o número de triângulos que se pode formar com esses pontos.

22) Sabe-se que por 3 pontos não alinhados sempre existe um plano e este é único. Dados 20 pontos no espaço, dos quais não existem 4 coplanares, calcule o número de planos definidos por esses pontos.

23) Calcule o número de diagonais de um dodecágono.

24) Considere 18 pontos dos quais apenas 5 são colineares e os demais são 3 a 3 não colineares. Calcule o número de retas que se pode formar com esses pontos.

25) Calcule o número de subconjuntos de 5 cartas que podem ser formados com um baralho de 52 cartas, sabendo que cada subconjunto contém exatamente 3 ases.

RESPOSTAS

1) a) $\frac{1}{380}$ h) $\frac{5}{n+2}$

b) 630 i) n! (n + 2)

c) 3 j) 2n! (-2n)

d) 209 l) $\frac{n(-3n+2)}{3n-1}$

e) 51 m) -2n

f) $\frac{1}{n+1}$ n) (n + 2)! n

g) n - 1 o) m

3) a) $E = \{(J)_1, (E)_1, (S)_1, (U)_1, (I)_1, (T)_1, (A)_1\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 5\,040$

b) $E = \{(E)_1, (S)_1, (U)_1, (I)_1, (T)_1, (A)_1\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 1, 1, 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 720$

c) 3 consoantes: J, S, T $\Rightarrow$ 3 720 = 2 160

d) 3 consoantes e 4 vogais
$E = \{(E)_1, (S)_1, (U)_1, (I)_1, (T)_1\}$ $\Big\} \Longrightarrow 3 \cdot 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1, 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 1\,440$

e) $E = \{(J)_1, (E)_1, (S)_1, (U)_1\}$
_ J _ E _ S _ U _ $\Big\} \Longrightarrow 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 120$

f) $E = \{(I)_1, (T)_1, (A)_1\}$
e problema anterior $\Big\} \Longrightarrow 120 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 720$

4) a) $E = \{(C)_2, (I)_1, (L)_1, (O)_1\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 60$

b) $E_1 = \{(C)_2, (I)_1, (O)_1\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2, 1, 1 \end{pmatrix}$
$E_2 = \{(C)_1, (I)_1, (L)_1, (O)_1\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix}$ $\Big\} \Longrightarrow 12 + 24 = 36$

c) $E = \{(I)_1, (C)_1, (O)_1\} \Longrightarrow 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 18$

d) $E = \{(L)_1, (O)_1\}$
$_\ L\ _\ O\ _$ $\Bigg\} \Longrightarrow 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1, 1 \end{pmatrix} = 6$

e) $E = \{(C)_2, (I)_1\}$
e problema anterior $\Bigg\} \Longrightarrow 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2, 1 \end{pmatrix} = 18$

5) a) $E = \{(B)_1, (A)_3, (R)_2, (C)_1\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 1, 3, 2, 1 \end{pmatrix} = 420$

b) $E = \{(B)_1, (A)_1, (R)_2, (C)_1\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 1, 1, 2, 1 \end{pmatrix} = 60$

c) $E = \{(B)_1, (A)_1, (R)_1\}$
$_\ B\ _\ A\ _\ R\ _$ $\Bigg\} \Longrightarrow 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 24$

6) $E = \{(D)_1, (U)_1, (N)_2\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1, 1, 2 \end{pmatrix} = 12$

7) $E = \{(M)_1, (C)_1, (D)_1, (U)_1, (N)_3\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 1, 1, 1, 1, 3 \end{pmatrix} = 840$

8) $E = \{(2)_1, (4)_2, (5)_1, (7)_1\}$
pois o algarismo 4 entra duas vezes $\Bigg\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 1, 2, 1, 1 \end{pmatrix} = 60$

9) $E = \{(C)_1, (D)_1, (N)_2\}$
unidade: 1, 5 ou 9 $\Bigg\} \Longrightarrow 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1, 1, 2 \end{pmatrix} = 36$

10) $E = \{(C)_1, (D)_1, (U)_1, (N)_2\}$
unidade de milhar 1, 2, 3, 5 ou 8 $\Bigg\} \Longrightarrow 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1, 1, 1, 2 \end{pmatrix} = 300$

11) $E_1 = \{(C)_1, (D)_1, (U)_1, (N)_2\}$
unidade de milhar: 1, 2, 3, 4 ou 5 $\Bigg\} \Longrightarrow 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1, 1, 1, 2 \end{pmatrix} = 300$

$E_2 = \{(M)_1, (C)_1, (D)_1, (U)_1, (N)_1\}$
dezena de milhar: 1, 2, 3, 4 ou 5 $\Bigg\} \Longrightarrow 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1, 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 600$

$E_3 = \{(DM)_1, (M)_1, (C)_1, (D)_1, (U)_1\}$
centena de milhar: 1, 2, 3, 4 ou 5 $\Bigg\} \Longrightarrow 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1, 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix} = 600$

$\Bigg\} \Longrightarrow 1500$

12) $E = \{(P)_3, (N)_{49}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 52 \\ 3,49 \end{pmatrix} = 22\,100$

13) $E = \{(P)_5, (N)_4\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 5,4 \end{pmatrix} = 126$

14) $E = \{(P)_{10}, (N)_2\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 10,2 \end{pmatrix} = 66$

15) a) $E = \{(P)_6, (N)_6\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 6,6 \end{pmatrix} = 924$

b) $E = \{(P)_1, (S)_1, (T)_1, (N)_9\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 1, 1, 1, 9 \end{pmatrix} = 1\,320$

c) $E = \{(P)_1, (S)_1, (O)_3, (N)_7\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 1, 1, 3, 7 \end{pmatrix} = 15\,840$

16) $E_1 = \{(P_{ra})_1, (S_{ra})_1, (N)_6\} \Longrightarrow \binom{8}{1, 1, 6}$

$E_2 = \{(O)_3, (N)_8\} \Longrightarrow \binom{11}{3, 8}$

$\Longrightarrow \binom{8}{1, 1, 6} \cdot \binom{11}{3, 8} = 9\,240$

17) a) $E_1 = \{(P)_2, (N)_3\} \Longrightarrow \binom{5}{2, 3}$

$E_2 = \{(P)_3, (N)_4\} \Longrightarrow \binom{7}{3, 4}$

$\Longrightarrow \binom{5}{2, 3} \cdot \binom{7}{3, 4} = 350$

b) $E_1 = \{(P)_5, (N)_7\} \Longrightarrow \binom{12}{5, 7} = 792$

$E_2 = \{(P)_5, (N)_2\} \Longrightarrow \binom{7}{5, 2} = 21$

$\Longrightarrow 792 - 21 = 771$

c) $E_1 = \{(P)_2, (N)_3\} \Longrightarrow \binom{5}{2, 3}$

$E'_1 = \{(P)_2, (N)_5\} \Longrightarrow \binom{7}{2, 5}$

$\Longrightarrow \binom{5}{2, 3} \cdot \binom{7}{2, 5} = 210$

$E_2 = \{(P)_3, (N)_2\} \Longrightarrow \binom{5}{3, 2}$

$E'_2 = \{(P)_1, (N)_6\} \Longrightarrow \binom{7}{1, 6}$

$\Longrightarrow \binom{5}{3, 2} \cdot \binom{7}{1, 6} = 70$

$E_3 = \{(P)_4, (N)_1\} \Longrightarrow \binom{5}{4, 1} = 5$

$\Longrightarrow 285$

Observação: pode ser feito tirando-se do total as comissões só de moças e as comissões de 3 moças.

d) $E_1 = \{(P)_3, (N)_4\} \Longrightarrow \binom{7}{3, 4}$

$E'_1 = \{(P)_2, (N)_3\} \Longrightarrow \binom{5}{2, 3}$

$\Longrightarrow \binom{7}{3, 4} \cdot \binom{5}{2, 3} = 350$

$E_2 = \{(P)_2, (N)_5\} \Longrightarrow \binom{7}{2, 5}$

$E'_2 = \{(P)_3, (N)_2\} \Longrightarrow \binom{5}{3, 2}$

$\Longrightarrow \binom{7}{2, 5} \cdot \binom{5}{3, 2} = 210$

$E_3 = \{(P)_1, (N)_6\} \Longrightarrow \binom{7}{1, 6}$

$E'_3 = \{(P)_4, (N)_1\} \Longrightarrow \binom{5}{4, 1}$

$\Longrightarrow \binom{7}{1, 6} \cdot \binom{5}{4, 1} = 35$

$E_4 = \{(P)_5, (N)_0\} \Longrightarrow \binom{5}{5, 0} = 1$

$\Longrightarrow 596$

18) a) $E = \{(A)_5, (B)_4, (C)_3\} \Longrightarrow \binom{12}{5, 4, 3} = 27\,720$

b) $E = \{(A)_1, (B)_1, (C)_1\}$ e problema anterior $\Longrightarrow \binom{3}{1, 1, 1} \Longrightarrow 166\,320$

19) $E = \{(P)_3, (N)_{13}\} \Longrightarrow \binom{16}{3,\ 13} = 560$

$E_1 = \{(P)_3, (N)_3\} \Longrightarrow \binom{6}{3,\ 3} = 20$

$E_2 = \{(P)_3, (N)_7\} \Longrightarrow \binom{10}{3,\ 7} = 120$

$\Rightarrow 140$

$\Rightarrow 560 - 140 = 420$

20) $E = \{(P)_3, (N)_9\} \Longrightarrow \binom{12}{3,\ 9} = 220$

$E_1 = \{(P)_3, (N)_0\} \Longrightarrow \binom{3}{3,\ 0} = 1$

$E_2 = \{(P)_3, (N)_1\} \Longrightarrow \binom{4}{3,\ 1} = 4$

$E_3 = \{(P)_3, (N)_2\} \Longrightarrow \binom{5}{3,\ 2} = 10$

$\Rightarrow 15$

$\Rightarrow 220 - 15 = 205$

21) $E = \{(P)_3, (N)_{12}\} \Longrightarrow \binom{15}{3,\ 12} = 455$

22) $E = \{(P)_3, (N)_{17}\} \Longrightarrow \binom{20}{3,\ 17} = 1\,140$

23) $E = \{(P)_2, (N)_{10}\} \Longrightarrow \binom{12}{2,\ 10} = 66$

lados: 12

$\Rightarrow 66 - 12 = 54$

24) $E = \{(P)_2, (N)_{16}\} \Longrightarrow \binom{18}{2,\ 16} = 153$

$E_1 = \{(P)_2, (N)_3\} \Longrightarrow \binom{5}{3,\ 2} = 10$

reta dos 5 pontos = 1

$\Rightarrow 153 - 10 + 1 = 144$

25) $E_1 = \{(A)_3, (N)_1\} \Longrightarrow \binom{4}{3,\ 1}$

$E_2 = \{(P)_2, (N)_{46}\} \Longrightarrow \binom{48}{2,\ 46}$

$\Longrightarrow \binom{4}{3,\ 1} \cdot \binom{48}{2,\ 46} = 4\,512$

SEQÜÊNCIA B

1) Qual o número de maneiras que podemos atribuir os nomes Paulo, Antonio e José a 11 meninos com a condição de que 3 deles se chamem Paulo, 2 Antonio e 6 José? (F.G.V.)

$E = \{(P)_3, (A)_2, (J)_6\} \Longrightarrow \binom{11}{3,2,6} = 4620$

2) De quantos modos 8 pessoas podem ocupar 12 salas distintas devendo cada sala conter pelo menos 3 pessoas? (MACK)

$E_1 = \{(S_1)_3, (S_2)_5\} \Longrightarrow \binom{8}{3,5}$;

$E_2 = \{(S_1)_4, (S_2)_4\} \Longrightarrow \binom{8}{4,4}$;

$E_3 = \{(S_1)_5, (S_2)_3\} \Longrightarrow \binom{8}{5,3}$; total = 182

3) Um conjunto tem 45 subconjuntos de 2 elementos. Qual é o número de elementos de A? (MACK)

$E = \{(P)_2, (N)_{n-2}\} \Longrightarrow \binom{n}{2, n-2} = 45 \Longrightarrow n = 10$

4) Quantos números de 3 algarismos distintos existem no nosso sistema de numeração? (PUC)

$E = \{(O)_1, (U)_1, (N)_7\}$

centena: 1,2,3,4,5,6,7,8 ou 9 $\Longrightarrow 9\binom{9}{1,1,7} = 648$

5) Sobre uma mesa são colocadas em linha 6 moedas. Qual o número de modos de se formar a fila com 2 caras e 4 coroas voltadas para cima? (G.V.)

$E = \{(Ca)_2, (Co)_4\} \Longrightarrow \binom{6}{2,4} = 15$

6) Dados 10 pontos A, B, C, ... num plano α, 3 dos quais nunca pertencentes à mesma reta, calcule o número de triângulos que podemos formar tendo cada um deles o ponto A como um dos vértices.

$E = \{(P)_2, (N)_7\} \Longrightarrow \binom{9}{2,7} = 36$

7) Num concurso com 12 participantes, de quantos modos podem ser distribuídos um 1º Prêmio e um 2º Prêmio, sendo que cada participante não pode receber mais que um prêmio?

$E = \{(1^{\circ}P)_1, (2^{\circ}P)_1, (N)_{10}\} \Longrightarrow \binom{12}{1,1,10} = 132$

Denominações Usuais na Análise Combinatória e suas Aplicações

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça as notações e nomenclatura, usadas habitualmente na Análise Combinatória.
b) resolva os exercícios de aplicação das fórmulas com a nova notação.
c) conheça os coeficientes binomiais, suas propriedades e as aplicações.

PERMUTAÇÃO, COMBINAÇÃO E ARRANJO

72. No capítulo anterior, resolvemos os seguintes problemas de contagem:

I – Contamos de quantos modos se podia escrever um conjunto E com n elementos distintos ou não, mudando a ordem desses elementos, que na Análise Combinatória é a contagem das **permutações simples com n elementos,** indicado por P_n, ou das **permutações com repetição com n elementos.**

II – Contamos o número de subconjuntos de um conjunto E' com n elementos distintos que se podia escrever com x elementos ($x < n$) tais que dois deles se diferenciassem pelo menos por um de seus elementos, que na Análise Combinatória é a contagem das **combinações simples de n elementos tomados x a x**, indicada por $C_{n,x}$.

III – Contamos o número de subconjuntos de um conjunto E' com n elementos distintos que se podia escrever com x elementos ($x < n$) tais que dois deles se diferenciassem pelo menos por um de seus elementos ou pela ordem desses elementos, que na Análise Combinatória é a contagem dos **arranjos simples de n elementos tomados x a x**, indicado por $A_{n,x}$.

Assim:

73. **Permutação:**

I – **Permutação simples:**

Seja o conjunto $G = \{a, b, \ldots, n\}$ com n elementos distintos.

Chama-se **permutação simples** desses n elementos cada modo de se escrever o conjunto G mudando a ordem desses n elementos.

Neste caso, o conjunto depósito E associado a G é o conjunto $E = \{(A)_1, (B)_1, \ldots, (N)_1\}$ com n celas onde cada cela tem um único elemento e o **número de permutações simples** é dado por:

$$\begin{pmatrix} n \\ 1, 1, \ldots 1 \end{pmatrix} = \frac{n!}{1!\,1!\ldots 1!} = n! \quad \text{e é indicado habitualmente por} \quad \boxed{P_n = n!}$$

II – Permutação com repetição:

Seja o conjunto $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_x, b_1, b_2, \ldots, b_y, p_1, p_2, \ldots, p_z\}$ com n elementos que podem ser agrupados segundo características comuns.

Chama-se **permutação com repetição** desses n elementos cada modo de se escrever o conjunto G mudando a ordem desses n elementos.

Neste caso, o conjunto depósito E associado a G é o conjunto $E = \{(A)_x, (B)_y, \ldots, (P)_z\}$ onde $x + y + \ldots + z = n$ e cada cela pode ter mais de um elemento e o número de permutações com repetição é dado por:

$$\begin{pmatrix} n \\ x, y \ldots z \end{pmatrix} = \frac{n!}{x!\,y!\ldots z!}$$

74. Combinação simples:

Seja o conjunto $G = \{a, b, \ldots, n\}$ com n elementos distintos.

Chama-se **combinação simples** desses **n** elementos tomados **x** a **x** ($x \leqslant n$) cada subconjunto de G com **x** elementos.

Portanto, uma combinação de **n** elementos tomados **x** a **x** se diferencia de outra pelo menos por um de seus elementos e não pela ordem desses elementos.

Neste caso, o conjunto depósito E associado a G é $E = \{(P)_x, (N)_{n-x}\}$ com apenas 2 celas, ou seja, a cela (P) dos que participam do subconjunto, com **x** elementos e a cela (N) dos que não participam desse subconjunto, com $(n - x)$ elementos. O **número de combinações simples** de n elementos tomados **x** a **x** é

$$\begin{pmatrix} n \\ x, n - x \end{pmatrix} = \frac{n!}{x!\,(n - x)!} \quad \text{e é indicado habitualmente por:} \quad C_{n,x} = \frac{n!}{x!\,(n - x)!}$$

75. Arranjos simples:

Seja o conjunto $G = \{a, b, \ldots, n\}$ com n elementos distintos.

Chama-se **arranjo simples** desses **n** elementos tomados **x** a **x** ($x \leqslant n$) **cada subconjunto ordenado** de G com **x** elementos.

Portanto, um arranjo de **n** elementos tomados **x** a **x** se diferencia de outro pelo menos por um de seus elementos ou pela ordem de seus elementos.

Neste caso, o conjunto depósito E associado a G é $E = \{(A)_1, (B)_1, ..., (X)_1, (N)_{n-x}\}$ com $(x + 1)$ celas, ou seja, **x** celas (A), (B), ..., (X) com 1 elemento cada uma para os **x** elementos que participam do subconjunto com **x** elementos, e 1 cela (N) com $(n - x)$ elementos dos que não participam desse subconjunto.

O número de **arranjos simples** de n elementos tomados **x a x** é

$$\binom{n}{1, 1, ... 1, n-x} = \frac{n!}{1!\,1! ... 1!\,(n-x)!} = \frac{n!}{(n-x)!}$$ e é indicado habitualmente por:

$$A_{n,x} = \frac{n!}{(n-x)!}$$

76. Aplicação:

1º) Assinale as afirmações corretas:

a. (X) $P_5 = 5!$

b. ( ) $P_5 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c. (X) $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d. (X) $P_6 = 6! = 720$

e. ( ) $C_{5,3} = \frac{5!}{3!} = 20$

f. (X) $C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

g. (X) $C_{10,7} = \frac{10!}{7!\,(10-7)!} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$

h. ( ) $A_{10,7} = \frac{10!}{7!\,(10-7)!} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$

i. (X) $A_{10,7} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}$

j. ( ) $A_{10,4} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!}$

l. (X) $A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$

m. (X) $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$

n. (X) $C_{6,4} = \frac{6!}{4!\,2!}$

o. ( ) $C_{6,4} = \frac{6!}{4!}$

p. ( ) $A_{6,4} = \frac{6!}{4!}$

q. (X) $A_{6,4} = \frac{6!}{2!}$

r. (X) $P_7 = 7!$

s. ( ) $P_7 = 7 \cdot P_7$

t. (X) $P_7 = 7 \cdot P_6$

2º) Complete e calcule:

a) $3A_{5,2} + 8C_{4,1} = 3 \cdot \frac{5!}{(5-2)!} + 8 \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} = 3 \cdot \frac{5!}{3!} + 8 \cdot \frac{4!}{3!} = 3.5.4 + 8.4 = 60 + 32 = 92$

b) $\frac{7A_{6,3}}{C_{7,4}} = \frac{\frac{7 \cdot 6!}{(6-3)!}}{\frac{7!}{4!(7-4)!}} = \frac{7!}{3!} \cdot \frac{4!\,3!}{7!} = 4! = 24$

c) $P_7 - 3P_6 = 7! - 3.6! = 7.6! - 3.6! = 6!(7-3) = 6!4 = 2880$

d) $\frac{9P_8}{P_9} = \frac{9.8!}{9!} = \frac{9!}{9!} = 1$

e) $\frac{A_{7,3}}{5} = \frac{7!}{(7-3)!} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7!}{4!} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7!}{5!} = 7.6 = 42$

f) $A_{m,2} = \frac{m!}{(m-2)!} = \frac{m.(m-1).(m-2)!}{(m-2)!} = m.(m-1) = m^2 - m$

g) $A_{n-1,2} = \frac{(n-1)!}{[(n-1) - 2]!} = \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1).(n-2).(n-3)!}{(n-3)!} =$

$= (n-1).(n-2) = n^2 - 3n + 2$

h) $\frac{A_{n,2}}{n-1} = \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{(n-1)} = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{(n-1)} = n$

i) $6 \cdot \frac{C_{n,3}}{A_{n,2}} = 6 \cdot \left(\frac{n!}{3!(n-3)!}\right) : \frac{n!}{(n-2)!} = 6. \frac{n!}{6.(n-3)!} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = n-2$

j) $\frac{P_{2n+1} - P_{2n}}{2n} = \frac{(2n+1)! - 2n!}{2n} = \frac{(2n+1).2n! - 2n!}{2n} = \frac{2n![2n+1-1]}{2n} = 2n!$

l) $(n-1)! [P_{n+1} - P_n] = (n-1)! [(n+1)! - n!] = (n-1)! [(n+1).n! - n!] =$

$= (n-1)! n! [n+1-1] = (n-1)! n! n = (n!)^2$

3º) Calcule o valor de **x** nas igualdades:

a) $C_{x-1,2} = 15$

Para isso, substitua $C_{x-1,2}$ por $\frac{(x-1)!}{2!(x-3)!}$, simplifique e resolva a equação obtida:

$\frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} = 15$

$\frac{(x-1).(x-2).(x-3)!}{2.(x-3)!} = 15 \Leftrightarrow (x-1).(x-2) = 30 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 28 = 0$

Você obteve a equação $x^2 - 3x - 28 = 0 \iff \begin{cases} x = 7 \\ \text{ou} \\ x = -4 \end{cases}$

$\Delta = 121 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$

$x = \frac{3 \pm 11}{2}$ → $\frac{14}{2} = 7$; $\frac{-8}{2} = -4$

Observe que para $x = -4$ você tem $C_{-4-1,2} = C_{-5,2}$, que não está definido. Portanto, temos apenas um valor para x que é 7.

b) $\frac{A_{2x+1,3}}{A_{2x,2}} = 21$

Para isso, substituindo $A_{2x+1,3}$ por $\frac{(2x+1)!}{(2x-2)!}$ e $A_{2x,2}$ por $\frac{2x!}{(2x-2)!}$, simplifique e resolva a equação obtida:

$$\frac{(2x+1)!}{(2x-2)!} \cdot \frac{(2x-2)!}{2x!} = 21$$

$$\frac{(2x+1) \cdot 2x!}{(2x-2)!} \cdot \frac{(2x-2)!}{2x!} = 21 \iff 2x+1 = 21 \iff x = 10$$

Você obteve x = 10.

c) $3 \cdot P_x - 12 \cdot P_{x-1} = 0$

Para isso, substitua P_x por $x!$, P_{x-1} por $(x-1)!$ e fatore:

$3 \cdot x! - 12 \cdot (x-1)! = 0$

$3 \cdot x \cdot (x-1)! - 12 \cdot (x-1)! = 0 \iff (x-1)!\,[3x-12] = 0$ e

como $(x-1)! \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$, vem $3x - 12 = 0 \iff x = 4$.

Você obteve x = 4.

d) $\dfrac{C_{x+1,4}}{C_{x-1,2}} = \dfrac{7}{2}$

Para isso, substituindo $C_{x+1,4}$ por $\dfrac{(x+1)!}{4!(x-3)!}$, $C_{x-1,2}$ por $\dfrac{(x-1)!}{2!(x-3)!}$, simplifique e resolva a equação obtida:

$$\frac{(x+1)!}{4!(x3)!} \cdot \frac{2!(x-3)!}{(x-1)!} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)!}{24 \cdot (x-3)!} \cdot \frac{2 \cdot (x-3)!}{(x-1)!} = \frac{7}{2} \iff \frac{(x+1) \cdot x}{6} = \frac{7}{1}$$

$$x^2 + x = 42 \iff x^2 + x - 42 = 0 \iff \begin{cases} x = -7 \\ \text{ou} \\ x = 6 \end{cases}$$

Você obteve: x = −7 ou x = 6 e para x = −7 você tem $C_{x+1,4} = C_{-7+1,4} = C_{-6,4}$, que não está definido e $C_{x-1,2} = C_{-7-1,2} = C_{-8,2}$, que não está definido, e portanto x = 6.

4º) Mostre que vale a igualdade $C_{n,10} = C_{n,n-10}$

De fato:

1º membro ⟶ $C_{n,n-10} = \dfrac{n!}{(n-10)!\,[n-(n-10)]!} = \dfrac{n!}{(n-10)!\,(n-n+10)!} =$

$= \dfrac{n!}{(n-10)!\,10!} = \dfrac{n!}{10!\,(n-10)!} = C_{n,10}$ → 1º membro

5º) Mostre que vale a igualdade $A_{n,2} + 2n = A_{n+1,2}$

De fato,

1º membro ⟶ $A_{n,2} + 2n = \dfrac{n!}{(n-2)!} + 2n = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} + 2n =$

$= n \cdot (n-1) + 2n = n^2 - n + 2n = n^2 + n$

2º membro ⟶ $A_{n+1,2} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-2)!} = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} =$

$= (n+1) \cdot n = n^2 + n$

Você obteve para o 1º membro e o 2º membro a expressão $n^2 + n$ e portanto vale a igualdade.

69) Mostre que vale a igualdade $(2n-1)!\,[(2n+1)! - 2n!] = (2n!)^2$

De fato,

1º membro $\rightarrow$ $(2n-1)!\,[(2n+1)! - 2n!] = (2n-1)!\,[(\underline{2n+1})\cdot 2n! - 2n!] =$

$= (2n-1)!\,2n!\,[\,\underline{2n+1-1}\,] = (2n-1)!\,\underline{2n}!\,\underline{2n} =$

$= \underbrace{2n\cdot(2n-1)!}_{2n!}\,\underline{2n}! = \underline{2n}!\,\underline{2n}! = (\underline{2n!})^2$ $\rightarrow$ 2º membro

Exercícios a resolver: itens 1 e 2, pág. 124.

NÚMERO BINOMIAL OU COEFICIENTE BINOMIAL

77. **Definição:**

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \leqslant n$.

Chama-se **número binomial n sobre p** ou **número binomial de classe p** do número **n** ao número dado por

$$\binom{n}{p,\ n-p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Indica-se habitualmente por $\binom{n}{p}$ e lê-se **"n sobre p"**.

Assim: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

78. Assinale as afirmações corretas:

a. (X) $\binom{5}{3}$ é o número binomial 5 sobre 3.

b. ( ) $\binom{3}{5}$ é o número binomial 5 sobre 3.

c. (X) $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$

d. (X) $\dfrac{10!}{7!\,3!}$ é o número binomial $\binom{10}{7}$.

e. (X) $\dfrac{10!}{3!\,7!}$ é o número binomial $\binom{10}{3}$.

f. (X) $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$

g. ( ) $\binom{8}{5} = \dfrac{8!}{5!} = 336$

h. (X) $\binom{8}{5} = \dfrac{8!}{5!\,3!} = 56$

i. (X) $\binom{n}{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\ [n-(n-p)]!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\ p!}$

j. (X) O número binomial $\binom{3}{0}$ é igual a $\dfrac{3!}{0!\,3!} = 1$.

l. ( ) O número binomial $\binom{3}{0}$ é igual a 3!

m. (X) O número binomial $\binom{0}{0}$ é igual a 1.

n. (X) $\binom{n}{0} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

o. ( ) O número binomial $\binom{3}{3}$ é igual a $\dfrac{3}{3!}$.

p. (X) O número binomial $\binom{3}{3}$ é igual a $\dfrac{3!}{3!\,0!} = 1$.

q. (X) O número binomial $\binom{n}{n}$ é igual a $\dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$.

r. ( ) O número binomial $\binom{n}{n}$ é sempre igual a n.

s. (X) $\dfrac{10!}{3!\,(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!\,(10-7)!} \Rightarrow \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$ onde $3 + 7 = 10$

t. (X) $\dfrac{8!}{2!\,(8-2)!} = \dfrac{8!}{6!\,(8-6)!} \Rightarrow \binom{8}{2} = \binom{8}{6}$ onde $2 + 6 = 8$

u. (X) Sendo $7 + 5 = 12$, $\binom{12}{7} = \binom{12}{5}$ pois $\dfrac{12!}{7!\,(12-7)!} = \dfrac{12!}{5!\,(12-5)!}$

v. (X) Sendo $6 + 3 = 9$, $\binom{9}{6} = \binom{9}{3}$ pois $\dfrac{9!}{6!\,(9-6)!} = \dfrac{9!}{3!\,(9-3)!}$

x. (X) $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)]!} \Longleftrightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ onde $p + n - p = n$

79. Em rèsumo:

1º) O número binomial $\binom{n}{0}$ é sempre igual a 1, isto é:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2º) O número binomial $\binom{n}{n}$ é sempre igual a 1, isto é:

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3º) Dois números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{x}$ são chamados **complementares** quando $p + x = n$.

Assim: $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são números binomiais complementares pois $p + n - p = n$ e você tem

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, isto é: Números binomiais complementares são iguais.

80. Relação de Stifel:

Vale também a propriedade:

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$ que é chamada **relação de Stifel.**

Assim por exemplo:

a) para $n = 8$ e $p = 6$ temos:

$$\binom{8}{6-1} + \binom{8}{6} = \binom{8+1}{6} \iff \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \binom{9}{6}$$

de fato:

$$\binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \frac{8!}{5!3!} + \frac{8!}{6!2!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} + \frac{8.7}{2.1} = 56 + 28 = 84$$

e

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84$$

b) para $n = 12$ e $p = 10$ temos:

$$\binom{12}{9} + \binom{12}{10} = \binom{13}{10}$$

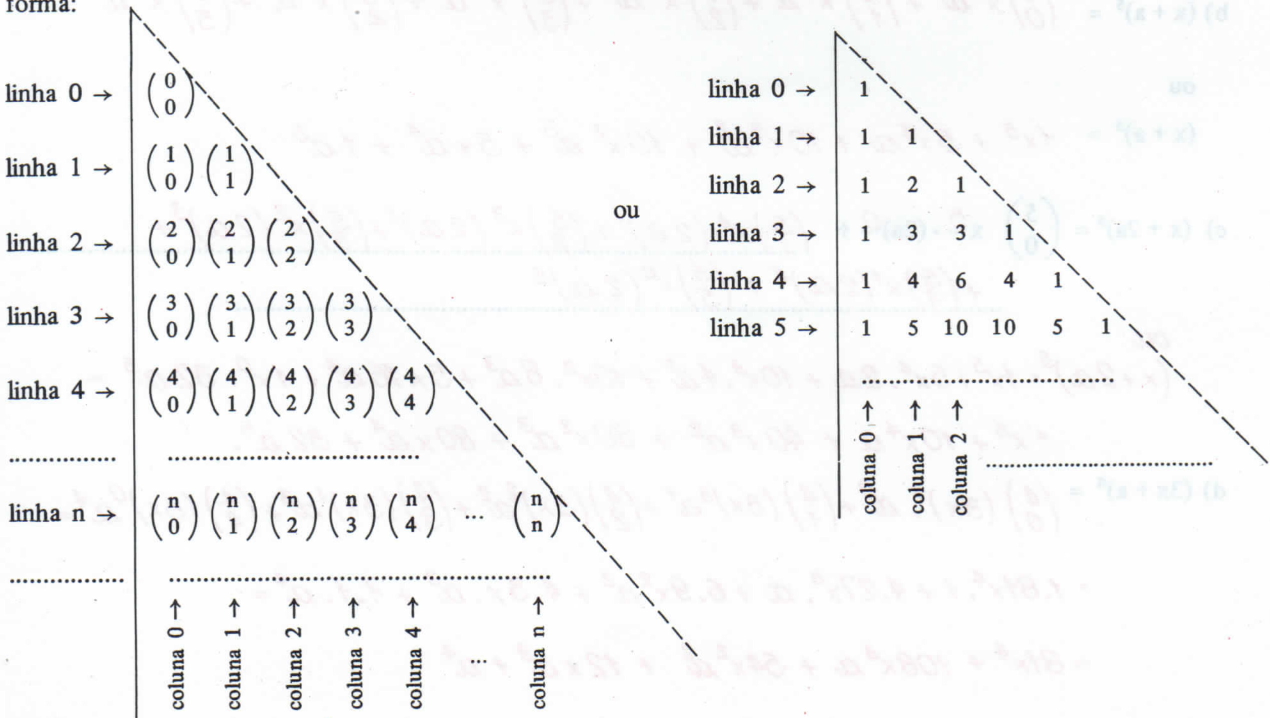
de fato:

$$\binom{12}{9} + \binom{12}{10} = \frac{12!}{9!3!} + \frac{12!}{10!2!} = \frac{12.11.10}{3.2.1} + \frac{12.11}{2.1} = 220 + 66 = 286$$

e

$$\binom{13}{10} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{13.12.11}{3.2.1} = 286$$

81. Triângulo de Pascal: é uma tabela onde os números binomiais foram dispostos em linhas e colunas da seguinte forma:



82. Definição:

Chama-se **fórmula do binômio de Newton** ao desenvolvimento da potência n-ésima do binômio (x + a), dado por:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n \cdot a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 \cdot a^n$$

Assim, por exemplo, o desenvolvimento de $(x + a)^6$ é:

$$(x+a)^6 = \binom{6}{0} x^6 \cdot a^0 + \binom{6}{1} x^5 \cdot a^1 + \binom{6}{2} x^4 \cdot a^2 + \binom{6}{3} x^3 \cdot a^3 + \binom{6}{4} x^2 \cdot a^4 + \binom{6}{5} x^1 \cdot a^5 +$$

$$+ \binom{6}{6} x^0 \cdot a^6$$

ou

$$(x+6)^6 = 1 \cdot x^6 + 6x^5 \cdot a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + 1 \cdot a^6$$

83. Aplicação:

Complete você:

a) $(x+a)^4 = \binom{4}{0} x^{4} \cdot a^0 + \binom{4}{1} x^{3} \cdot a^1 + \binom{4}{2} x^{2} \cdot a^{2} + \binom{4}{3} x^{1} \cdot a^{3} +$

$+ \binom{4}{4} x^{0} \cdot a^{4}$

ou

$(x+a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4$

b) $(x+a)^5 = \binom{5}{0}x^5a^0 + \binom{5}{1}x^4a^1 + \binom{5}{2}x^3a^2 + \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}x^1a^4 + \binom{5}{5}x^0a^5$

ou

$(x+a)^5 = 1x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + 1a^5$

c) $(x+2a)^5 = \binom{5}{0} x^{5} \cdot (2a)^{0} + \binom{5}{1}x^4(2a)^1 + \binom{5}{2}x^3(2a)^2 + \binom{5}{3}x^2(2a)^3 +$

$+ \binom{5}{4}x^1(2a)^4 + \binom{5}{5}x^0(2a)^5$

ou

$(x+2a)^5 = 1x^5 + 5x^4 \cdot 2a + 10x^3 \cdot 4a^2 + 10x^2 \cdot 8a^3 + 5x\,16a^4 + 1x^0 \cdot 32a^5 =$

$= x^5 + 10x^4a + 40x^3a^2 + 80x^2a^3 + 80xa^4 + 32a^5.$

d) $(3x+a)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 \cdot a^0 + \binom{4}{1}(3x)^3a^1 + \binom{4}{2}(3x)^2a^2 + \binom{4}{3}(3x)^1a^3 + \binom{4}{4}(3x)^0a^4 =$

$= 1.81x^4.1 + 4.27x^3.a + 6.9x^2a^2 + 4.3x.a^3 + 1.1.a^4 =$

$= 81x^4 + 108x^3a + 54x^2a^2 + 12xa^3 + a^4$

e) $(x-2)^6 = [x+(-2)]^6 = \binom{6}{0} x^{6} \cdot (-2)^{0} + \binom{6}{1}x^5(-2)^1 + \binom{6}{2}x^4(-2)^2 + \binom{6}{3}x^3(-2)^3 +$

$+ \binom{6}{4}x^2(-2)^4 + \binom{6}{5}x^1(-2)^5 + \binom{6}{6}x^0(-2)^6 =$

$= 1x^6 \cdot 1 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) + 15x^2 \cdot 16 + 6x^1(-32) + 1 \cdot x^0 \cdot 64 =$

$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$

f) $(x-a)^4 = [x+(-a)]^4 = \binom{4}{0}x^4 \cdot (-a)^0 + \binom{4}{1}x^3 \cdot (-a)^1 + \binom{4}{2}x^2 \cdot (-a)^2 + \binom{4}{3}x^1(-a)^3 +$

$+ \binom{4}{4}x^0(-a)^4 =$

$= 1x^4 \cdot 1 + 4x^3 \cdot (-a) + 6x^2a^2 + 4 \cdot x \cdot (-a^3) + 1 \cdot a^4 =$

$= x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4$

g) $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^5 = \binom{5}{0}x^5 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^0 + \binom{5}{1}x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^1 + \binom{5}{2}x^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \binom{5}{3}x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 +$

$+ \binom{5}{4}x^1 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^4 + \binom{5}{5}x^0 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^5 =$

$= 1 \cdot x^5 \cdot 1 + 5x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + 10x^3 \cdot \frac{1}{x^4} + 10 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^6} + 5x \cdot \frac{1}{x^8} + 1 \cdot \frac{1}{x^{10}} =$

$= x^5 + 5x^2 + 10 \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{1}{x^4} + 5 \cdot \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^{10}}$

Exercícios a resolver: item 3, pág. 124.

84. Termo geral no desenvolvimento do binômio de Newton

No desenvolvimento do binômio de Newton temos:

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n a^0}_{1º\ \text{termo}} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}a^1}_{2º\ \text{termo}} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}a^2}_{3º\ \text{termo}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}x^0 a^n}_{(n+1)º\ \text{termo}}$$

Observe que:

1º termo $\rightarrow T_1 = \binom{n}{0} x^n a^0$

2º termo $\rightarrow T_2 = \binom{n}{1} x^{n-1} a^1$

3º termo $\rightarrow T_3 = \binom{n}{2} x^{n-2} a^2$

4º termo $\rightarrow T_4 = \binom{n}{3} x^{n-3} a^3$

.
.
.

(p + 1)-ésimo termo $\longrightarrow$ $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$ **termo geral do binômio de Newton.**

Assim, por exemplo, o 9º termo do desenvolvimento de $(x + a)^{12}$ é:

$$T_9 = T_{8+1} = \binom{12}{8} x^{12-8} \cdot a^8 = \frac{12!}{8!\,4!} x^4 a^8 = 495 x^4 a^8 .$$

85. Aplicação:

1º) Usando a fórmula do **termo geral** $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot a^p$, assinale as afirmações corretas:

a. (X) Em $(x + a)^{10}$, o 8º termo é calculado fazendo $n = 10$ e $p = 7$, pois $T_{p+1} = T_{7+1} = T_8$.

b. (X) Em $(x + a)^{10}$, o 8º termo é $T_8 = T_{7+1} = \binom{10}{7} x^{10-7} \cdot a^7 = 120x^3 a^7$.

c. ( ) Em $(x + a)^{10}$, $\binom{10}{7} x^{10-7} a^7$ é o 7º termo.

d. ( ) Em $(x + 5)^7$, o 4º termo é calculado fazendo $n = 7$ e $p = 4$.

e. (X) Em $(x + 5)^7$, o 4º termo é calculado fazendo $n = 7$ e $p = 3$, pois $T_{p+1} = T_{3+1} = T_4$.

f. (X) Em $(x + 5)^7$, $T_4 = T_{3+1} = \binom{7}{3} x^{7-3} 5^3 = 4375x^4$.

g. ( ) Em $(2x - a)^{12}$, o 9º termo é calculado fazendo $n = 12$ e $p = 9$.

h. (X) Em $(2x - a)^{12}$, o 9º termo é calculado fazendo $n = 12$ e $p = 8$, pois $T_{p+1} = T_{8+1} = T_9$.

i. ( ) Em $(2x - a)^{12}$, $T_9 = \binom{12}{9} (2x)^{12-9} \cdot (-a)^9$.

j. (X) Em $(2x - a)^{12}$, $T_9 = T_{8+1} = \binom{12}{8} (2x)^{12-8} \cdot (-a)^8$.

l. (X) Em $(x^2 - 3x)^{15}$, o décimo termo é $T_{10} = T_{9+1} = \binom{15}{9} (x^2)^{15-9} \cdot (-3x)^9$.

2º) Calcule:

a) O 13º termo do desenvolvimento de $(x^2 + y)^{15}$:

$$T_{13} = T_{12+1} = \binom{15}{12} \cdot (x^2)^{15-12} \cdot y^{12} = \frac{15!}{12!\,3!} \cdot (x^2)^3 y^{12} = 455x^6 y^{12}$$

b) O 4º termo do desenvolvimento de $(2x + 5)^6$:

$$T_4 = T_{3+1} = \binom{6}{3} (2x)^{6-3} \cdot 5^3 = \frac{6!}{3!\,3!} (2x)^3 \cdot 125 = 20000x^3$$

c) O 8º termo do desenvolvimento de $(x^2 - x)^{12}$:

$$T_8 = T_{7+1} = \binom{12}{7} \cdot (x^2)^{12-7} \cdot (-x)^7 = \frac{12!}{7!\,5!} (x^2)^5 \cdot (-x)^7 = -792x^{17}$$

d) O expoente de x no 6º termo do desenvolvimento de $(x^5 + \frac{1}{x^2})^{12}$:

Para isso,

$$T_6 = T_{5+1} = \binom{12}{5} (x^5)^{12-5} \cdot (x^{-2})^5 = \binom{12}{5} x^{35} x^{-10} = \binom{12}{5} x^{25}$$

portanto, o expoente de x em T_6 é 25.

3º) Sabendo que no desenvolvimento de $(x^2 + \frac{1}{x})^{10}$, o termo geral é dado por

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} (x^2)^{10-p} \cdot (\frac{1}{x})^p :$$

a) calcule o valor de p para se obter o termo de 8º grau em x.

b) calcule esse termo:

Resolvendo vem:

a) Você deve calcular o expoente de x no termo geral T_{p+1} e igualar esse expoente a 8, pois se deseja o termo de 8º grau em x.

Assim: $T_{p+1} = \binom{10}{p} (x^2)^{10-p} \cdot (\frac{1}{x})^p$

e $(x^2)^{10-p} \cdot (\frac{1}{x})^p = x^{2\cdot(10-p)} \cdot (x^{-1})^{p} = x^{20-2p} \cdot x^{-p} = x^{20-3p}$

Logo, $20-3p = 8 \Rightarrow p = 4$.

b) O termo $T_{p+1} = \binom{10}{p} (x^2)^{10-p} \cdot (\frac{1}{x})^p$ para p = 4 (valor obtido no item **a**) é:

$T_{p+1} = T_{4+1} = \binom{10}{4}(x^2)^{10-4} \cdot (\frac{1}{x})^4 = \frac{10!}{4!6!}(x^2)^6 \cdot x^{-4} = 210x^{12} \cdot x^{-4} = 210x^8$

4º) Calcule o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(2x^4 + \frac{1}{x})^9$.

Para isso, calcule antes o expoente de x no termo geral T_{p+1} e iguale esse expoente a 6, determinando o valor de **p**.

Assim:

$T_{p+1} = \binom{9}{p} (2x^4)^{9-p} \cdot (x^{-1})^{p} = \binom{9}{p} 2^{9-p} x^{36-4p} \cdot x^{-p} = \binom{9}{p} 2^{9-p} \cdot x^{36-5p}$

$36 - 5p = 6 \Longleftrightarrow p = 6$

Você obteve p = 6 e, portanto, substituindo p = 6 em T_{p+1} teremos o coeficiente pedido:

$T_{6+1} = \binom{9}{6} (2x^4)^{3} \cdot (x^{-1})^{6} = \frac{9!}{6!3!} 2^3 x^{12} x^{-6} = 84 \cdot 8x^6 = 672x^6$

Portanto, o coeficiente de x^6 é 672.

5º) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $(2x + x^{-2})^6$.

Para isso, calcule antes o expoente de **x** no termo geral T_{p+1} e iguale esse expoente a zero determinando o valor de **p**.

Assim:

$T_{p+1} = \binom{6}{p}(2x)^{6-p} \cdot (x^{-2})^p = \binom{6}{p} 2^{6-p} \cdot x^{6-p} \cdot x^{-2p} = \binom{6}{p} 2^{6-p} \cdot x^{6-3p}$

$6 - 3p = 0 \Longleftrightarrow p = 2$

Você obteve p = 2 e portanto o termo independente de **x** será:

$T_{p+1} = T_{2+1} = \binom{6}{2} 2^{6-2} \cdot x^{6-3\cdot2} = \frac{6!}{2!4!} 2^4 \cdot x^0 = 240$

Exercícios a resolver: itens 4 a 15, págs. 124 e 125.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Calcule:

a) $A_{10,3}$

b) $C_{10,3}$

c) P_5

d) P_{n-2}

e) $C_{5,2}$

f) $A_{8,2}$

g) $A_{m,3}$

h) $C_{m,3}$

i) $A_{m+2,2}$

j) $C_{m+3,3}$

l) $\dfrac{P_5 - P_4}{4 \cdot P_4}$

m) $\dfrac{A_{8,3} + A_{8,2}}{A_{5,2}}$

n) $\dfrac{2P_3 + 3A_{4,2}}{5P_4 - P_2}$

o) $\dfrac{A_{6,5} - A_{6,4}}{A_{5,4} - A_{5,3}}$

p) $\dfrac{C_{5,4} + C_{5,3}}{C_{5,2}}$

q) $\dfrac{A_{n,4} \cdot P_{n-4}}{P_{n-2}}$

r) $\dfrac{A_{n,5} + A_{n,4}}{A_{n,3}}$

s) $C_{m+1,m-1} - C_{m,m-2}$

t) $\dfrac{A_{m+p,p+2} + A_{m+p,p+1}}{A_{m+p,p}}$

2) Calcule o valor da incógnita nas seguintes equações:

a) $A_{n,2} = 12$

b) $C_{n,2} = 10$

c) $A_{n,2} = C_{n,3}$

d) $C_{n,2} = C_{n,3}$

e) $\dfrac{A_{x,2}}{A_{x,3}} = \dfrac{1}{4}$

f) $C_{x+2,4} = 11C_{x,2}$

g) $\dfrac{A_{x,2} + A_{x,3}}{A_{x,3}} = 5$

h) $\dfrac{A_{x+1,n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 20$

i) $\dfrac{A_{x-3,n-3} \cdot P_{x-n}}{P_{x-5}} = 72$

j) $\dfrac{C_{x,5} + C_{x,4}}{C_{x,5} - C_{x,4}} = \dfrac{5}{3}$

3) Desenvolva as potências abaixo, empregando a fórmula do binômio de Newton:

a) $(2x + a)^4$

b) $(x - 1)^6$

c) $(3x - a)^3$

d) $(2x - 3y)^5$

e) $(2x + \frac{a}{2})^4$

f) $(2x - \frac{1}{2})^5$

g) $(x^3 - \frac{1}{x^2})^4$

h) $(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}})^3$

4) Calcule em cada desenvolvimento:

a) O 8º termo de $(x^3 + y)^{10}$.

b) O 5º termo de $(x^2 - 2a)^{12}$.

c) O 3º termo de $(\frac{1}{x} + 2x^3)^6$.

d) O 11º termo de $(x^2 - \frac{1}{x^3})^{10}$.

e) O termo central de $(x^2 - \frac{1}{x^3})^{10}$.

f) O último termo de $(2x - \frac{1}{x^2})^5$.

g) O 11º termo de $(2\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})^{12}$.

h) O 12º termo de $(2x^2 - \frac{1}{x})^{13}$.

5) Calcule o termo de 5º grau em x de $(2x + \frac{1}{x^4})^{10}$.

6) Calcule o termo de 3º grau em x de $(\frac{1}{x} + 2x^3)^9$.

7) Calcule o termo de 6º grau em x de $(x^2 - x^{-1})^{12}$.

8) Calcule o termo independente de x em:

a) $(2x + 1)^5$

b) $(x^2 - \frac{a}{2})^{10}$

c) $(2x + \frac{1}{x^2})^6$

d) $(\frac{1}{x} - x^4)^{10}$

9) Calcule o coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(\frac{1}{x} + x^2)^{10}$.

10) Calcule o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(x^2 - \frac{1}{x^3})^{10}$.

11) Calcule o coeficiente de x^{-11} no desenvolvimento de $(2x^2 + \frac{1}{x^3})^{12}$.

12) Calcule m para que o 5º termo de $(x + a)^m$ seja $210x^6a^4$.

13) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $(\frac{1}{x} - \sqrt[4]{x})^{15}$.

14) Calcule os valores de x que tornam iguais o 4º e 5º termos no desenvolvimento de $(\frac{x}{2} - \frac{1}{x-3})^7$.

15) Calcule o valor de a para que o coeficiente de x^5 seja igual ao coeficiente de x^{15} no desenvolvimento de $(2x^2 + \frac{a}{x^3})^{10}$.

RESPOSTAS

1) a) 720
b) 120
c) 120
d) $(n-2)!$
e) 10
f) 56
g) $m(m-1)(m-2)$
h) $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$
i) $(m+2)(m+1)$
j) $\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6}$
l) 1
m) $\frac{98}{5}$
n) $\frac{24}{59}$
o) 6
p) $\frac{3}{2}$
q) $n^2 - n$
r) $(n-3)^2$
s) m
t) m^2

2) a) $n = 4$
b) $n = 5$
c) $n = 8$
d) $n = 5$
e) $x = 6$
f) $x = 10$
g) $x = \frac{9}{4}$
h) $x = 4$
i) $x = 12$
j) $x = 24$

3) a) $16x^4 + 32x^3a + 24x^2a^2 + 8xa^3 + a^4$
b) $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$
c) $27x^3 - 27x^2a + 9xa^2 - a^3$
d) $32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5$
e) $16x^4 + 16x^3a + 6x^2a^2 + xa^3 + \frac{1}{16}a^4$
f) $32x^5 - 40x^4 + 20x^3 - 5x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{1}{32}$
g) $x^{12} - 4x^7 + 6x^2 - 4x^{-3} + x^{-8}$
h) $x^6 - 3x^{\frac{7}{2}} + 3x - x^{-\frac{3}{2}}$

4) a) $120x^9y^7$
b) $7920x^{16}a^4$
c) $60x^2$
d) x^{-30}
e) $-252x^{-5}$
f) $-x^{-10}$
g) $264x^{-19}$
h) $-312x^{-7}$

5) $5120x^5$

6) $672x^3$

7) $924x^6$

8) a) 1
b) $\frac{1}{1024}a^{10}$
c) 240
d) 45

9) 210

10) 45

11) 25344

12) $m = 10$

13) 455

14) $x = 1$ ou $x = 2$

15) $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Probabilidade

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) adquira noções fundamentais sobre a Teoria das Probabilidades.
b) adquira técnicas no cálculo de probabilidades em situações mais simples.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

86. Chama-se **experimento aleatório** a todo experimento que mesmo repetido muitas vezes em condições semelhantes, apresenta em cada vez resultado imprevisível.

Exemplos: lançamento de um dado; retirada de uma carta de um baralho; lançamento de uma moeda etc.

87. **Conjunto universo (ou espaço amostral)** de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Indica-se o conjunto universo por **U**.

Assim:

a) Como num lançamento de um dado podemos obter as faces 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, onde o número de elementos de U é $n(U) = 6$.

b) Como num lançamento de uma moeda podemos obter cara ou coroa, o conjunto universo desse experimento é $U = \{C_a, C_o\}$, onde o número de elementos de U é $n(U) = 2$.

c) Como em dois lançamentos sucessivos de uma moeda podemos obter caras nos dois lançamentos, ou cara no 1º lançamento e coroa no 2º lançamento, ou coroa no 1º e cara no 2º lançamento, ou coroa nos dois lançamentos, o conjunto universo é:

$U = \{(C_a, C_a); (C_a, C_o); (C_o, C_a); (C_o, C_o)\}$, onde o número de elementos **(pares) de U é $n(U) = 4$.**

88. Assinale, então, as afirmações corretas, considerando os seguintes experimentos:

a. ( ) No lançamento de uma moeda, $U = \{C_a, C_a\}$ e $n(U) = 2$.
b. (X) No lançamento de uma moeda, $U = \{C_a, C_o\}$ e $n(U) = 2$.
c. (X) Num lançamento de um dado, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(U) = 6$.
d. ( ) Num lançamento de um dado, $U = \{2, 4, 6\}$ e $n(U) = 3$.
e. (X) Num nascimento de uma criança, $U = \{H, M\}$ e $n(U) = 2$.
f. ( ) Em dois nascimentos de criança, $U = \{H, M\}$ e $n(U) = 2$.

g. (X) Em dois nascimentos de criança, U = {(H, H); (H, M); (M, H); (M, M)} e n(U) = 4.

h. (X) Na extração de uma bola de uma urna com 3 bolas brancas e 2 vermelhas, U = {B_1, B_2, B_3, V_1, V_2} e n(U) = 5.

i. ( ) Na retirada de uma ficha de uma urna com 7 fichas numeradas de 1 a 7, U = {f_1, f_2, f_3} e n(U) = 3.

j. (X) Na retirada de uma ficha de uma urna com 7 fichas numeradas de 1 a 7, U = {f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7} e n(U) = 7.

EVENTOS

89. Chama-se **evento** qualquer subconjunto do conjunto universo U de um experimento aleatório.

Assim, qualquer que seja $E \subset U$, E é um evento.

90. Quando E = U, E é chamado **evento certo**.

91. Quando $E \subset U$ e E é um conjunto unitário, E é chamado **evento elementar**.

92. Quando $E \subset U$ e E é o conjunto vazio, E é chamado **evento impossível**.

93. Chama-se **evento complementar** de um evento $E \subset U$ o evento $\overline{E} = U - E$, isto é, $\overline{E}$ é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a U e não pertencem a E.

94. Assim, seja o lançamento de um dado, onde U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Então:

a) o evento "obter um número ímpar na face superior" é:

$E_1 = \{1, 3, 5\} \subset U$, onde $n(E_1) = 3$

b) o evento complementar de E_1 é:

$\overline{E}_1 = \{2, 4, 6\} \subset U$, onde $n(\overline{E}_1) = 3$

c) o evento "obter um número menor ou igual a 4 na face superior" é:

$E_2 = \{1, 2, 3, 4\} \subset U$, onde $n(E_2) = 4$

d) o evento complementar de E_2 é:

$\overline{E}_2 = \{5, 6\} \subset U$, onde $n(\overline{E}_2) = 2$

e) o evento "obter o número 5 na face superior" é:

$E_3 = \{5\} \subset U$, onde $n(E_3) = 1$

Veja: E_3 é um evento elementar.

f) o evento "obter um número menor ou igual a 6 na face superior" é:

$E_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset U$, onde $n(E_4) = 6$

Veja: E_4 é um evento certo.

g) o evento complementar de E_4 é:

$\overline{E} = \varnothing \subset U$, onde $n(\overline{E}_4) = 0$

Veja: $\overline{E}_4$ é um evento impossível.

95. **Aplicação:**

Assinale as afirmações corretas, considerando:

1º) No lançamento de um dado, o evento:

a. ( ) "obter um número par" é $E_1 = \{0, 2, 4, 6\}$, onde $n(E_1) = 4$.
b. (X) "obter um número par" é $E_1 = \{2, 4, 6\}$, onde $n(E_1) = 3$.
c. (X) complementar de "obter um número par" é $\overline{E_1} = \{1, 3, 5\}$, onde $n(\overline{E_1}) = 3$.
d. (X) "obter a face 3" é $E_2 = \{3\}$, onde $n(E_2) = 1$.
e. ( ) "obter a face 3" é $E_2 = \{1, 3\}$, onde $n(E_2) = 2$.
f. ( ) complementar de "obter a face 3" é $\overline{E_2} = \{2, 4, 5, 6\}$, onde $n(\overline{E_2}) = 4$.
g. (X) complementar de "obter a face 3" é $\overline{E_2} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, onde $n(\overline{E_2}) = 5$.
h. (X) "obter um número menor que 5" é $E_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, onde $n(E_3) = 4$.
i. ( ) "obter um número menor que 5" é $E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, onde $n(E_3) = 5$.
j. (X) complementar de "obter um número menor que 5" é $\overline{E_3} = \{5, 6\}$, onde $n(\overline{E_3}) = 2$.

2º) Em dois lançamentos sucessivos de uma moeda, o evento:

a. (X) "obter apenas uma cara" é $E_1 = \{(C_a, C_o); (C_o, C_a)\}$, onde $n(E_1) = 2$.
b. ( ) "obter apenas uma cara" é $E_1 = \{(C_a, C_o); (C_o, C_a); (C_a, C_a)\}$, onde $n(E_1) = 3$.
c. (X) complementar de "obter apenas uma cara" é $\overline{E_1} = \{(C_a, C_a); (C_o, C_o)\}$, onde $n(\overline{E_1}) = 2$.
d. ( ) "obter duas caras" é $E_2 = \{(C_a, C_a); (C_o, C_o)\}$, onde $n(E_2) = 2$.
e. (X) "obter duas caras" é $E_2 = \{(C_a, C_a)\}$, onde $n(E_2) = 1$.
f. (X) complementar de "obter duas caras" é $\overline{E_2} = \{(C_a, C_o); (C_o, C_a); (C_o, C_o)\}$, onde $n(\overline{E_2}) = 3$
g. ( ) "obter faces iguais" é $E_3 = \{(C_a, C_a)\}$, onde $n(E_3) = 1$.
h. (X) "obter faces iguais" é $E_3 = \{(C_a, C_a); (C_o, C_o)\}$, onde $n(E_3) = 2$.
i. (X) "obter faces não iguais" é evento complementar de "obter faces iguais".
j. (X) "obter pelo menos uma coroa" é $E_4 = \{(C_a, C_o); (C_o, C_a); (C_o, C_o)\}$, onde $n(E_4) = 3$.

3º) Na extração de uma carta de um baralho, o evento:

a. (X) "tirar um ás" é $A = \{A_o, A_c, A_e, A_p\}$, onde $n(A) = 4$.
b. ( ) "tirar um ás" é $A = \{A_o\}$, onde $n(A) = 1$.
c. ( ) "tirar uma dama de naipe vermelho" é $B = \{D_o, D_c, D_e, D_p\}$, onde $n(B) = 4$.
d. (X) "tirar uma dama de naipe vermelho" é $B = \{D_o, D_c\}$, onde $n(B) = 2$.
e. (X) "tirar um rei de naipe preto" é $C = \{R_e, R_p\}$, onde $n(C) = 2$.
f. (X) "tirar um ás de naipe verde" é $D = \emptyset$, onde $n(D) = 0$.
g. ( ) "tirar um ás de naipe verde" é $D = \{A_v\}$, onde $n(D) = 1$.

PROBABILIDADE

96. **Definição:**

Seja um experimento aleatório e U o seu conjunto universo.

Chama-se **probabilidade** de um evento A, $A \subset U$, ao número real $\mathbf{p(A) = \frac{n(A)}{n(U)}}$, onde $n(A)$ é o número de elementos de A e $n(U)$ o número de elementos de U.

A definição dada só é válida se todos os elementos de U têm a mesma probabilidade, ou seja, U é um conjunto **eqüiprobabilístico.**

97. Aplicação:

1º) Complete, usando a definição anterior:

Seja um experimento aleatório cujo conjunto universo tem 30 elementos e os eventos A, B, C, D, E, F e G contidos em U.

a) $n(A) = 15 \Longrightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

b) $n(B) = 10 \Longrightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) $n(C) = 6 \Longrightarrow p(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

d) $n(D) = 3 \Longrightarrow p(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

e) $n(E) = 1 \Longrightarrow p(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{1}{30}$

f) $n(F) = 30 \Longrightarrow p(F) = \frac{n(F)}{n(U)} = \frac{30}{30} = 1$

g) $n(G) = 0 \Longrightarrow p(G) = \frac{n(G)}{n(U)} = \frac{0}{30} = 0$

2º) Complete e calcule o que se pede, considerando o lançamento de um dado:

a) A probabilidade do evento A "obter o número 5 na face superior".

$A = \{5\} \Longrightarrow n(A) = 1$, $n(U) = 6$ $\Longrightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{6}$

b) A probabilidade do evento B "obter o número 3 na face superior".

$B = \{3\} \Longrightarrow n(B) = 1$, $n(U) = 6$ $\Longrightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{1}{6}$

c) A probabilidade de um evento elementar $C = \{e\}$, $e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$C = \{e\} \Longrightarrow n(C) = 1$, $n(U) = 6$ $\Longrightarrow p(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{1}{6}$

Observe que sendo U um conjunto de 6 elementos, o número de subconjuntos unitários de U é 6 e o número de eventos elementares é 6 e você tem:

$p(C_1) + p(C_2) + p(C_3) + p(C_4) + p(C_5) + p(C_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

d) A probabilidade do evento D "obter um múltiplo de 3 na face superior".

$D = \{3, 6\} \Longrightarrow n(D) = 2$, $n(U) = 6$ $\Longrightarrow p(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

e) A probabilidade do evento E "obter um número não múltiplo de 3".

$E = \{1, 2, 4, 5\} \Longrightarrow n(E) = 4$, $n(U) = 6$ $\Longrightarrow p(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

f) A probabilidade do evento F "obter o número 7 na face superior".

$F = \emptyset \Longrightarrow n(F) = 0$, $n(U) = 6$ $\Longrightarrow p(F) = \frac{n(F)}{n(U)} = \frac{0}{6} = 0$

g) A probabilidade do evento G "obter um número menor ou igual a 6 na face superior":

G = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ⟹ n(G) = 6, n(U) = 6 ⟹ $p(G) = \frac{n(G)}{n(U)} = 1$

3º) Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um número divisor de 21 na face superior?

n(U) = 6

O evento B "obter um divisor de 21" é B = {1, 3}, onde n(B) = 2.

$p(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4º) Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um divisor de 21 ou o número 4 na face superior?

n(U) = 6

O evento C "obter um divisor de 21 ou o número 4" é C = {1, 3, 4}, onde n(C) = 3.

$p(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5º) Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um número par e divisor de 10?

n(U) = 6

O evento D "obter um número par e divisor de 10" é D = {2}, onde n(D) = 1.

$p(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{1}{6}$

6º) Em uma retirada de uma carta de um baralho de 52 cartas, calcule:

a) a probabilidade de se obter uma dama.

n(U) = 52

O evento A "obter uma dama" é A = {D_o, D_c, D_e, D_p}

n(A) = 4

$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

b) a probabilidade de se obter uma dama de ouro.

n(U) = 52

O evento B "obter uma dama de ouro" é B = {D_o}

n(B) = 1

$p(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{1}{52}$

c) a probabilidade de se obter um rei de naipe vermelho.

n(U) = 52

O evento C "obter um rei de naipe vermelho" é C = {R_o, R_c}

n(C) = 2

$p(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

g) A probabilidade do evento G "obter um número menor ou igual a 6 na face superior":

G = {1, 2, 3, 4, 5, 6,} $\Longrightarrow$ n (G) = 6, n (U) = 6 $\Longrightarrow$ $p(G) = \frac{n(G)}{n(U)} = 1$

3º) Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um número divisor de 21 na face superior?

n (U) = 6

O evento B "obter um divisor de 21" é B = {1, 3}, onde n (B) = 2.

$p(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

4º) Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um divisor de 21 ou o número 4 na face superior?

n (U) = 6

O evento C "obter um divisor de 21 ou o número 4" é C = {1, 3, 4}, onde n (C) = 3.

$p(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5º) Num lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um número par e divisor de 10?

n (U) = 6

O evento D "obter um número par e divisor de 10" é D = {2}, onde n (D) = 1.

$p(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{1}{6}$

6º) Em uma retirada de uma carta de um baralho de 52 cartas, calcule:

a) a probabilidade de se obter uma dama.

n (U) = 52

O evento A "obter uma dama" é A = {D_o, D_c, D_e, D_p}

n (A) = 4

$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

b) a probabilidade de se obter uma dama de ouro.

n (U) = 52

O evento B "obter uma dama de ouro" é B = {D_o}

n (B) = 1

$p(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{1}{52}$

c) a probabilidade de se obter um rei de naipe vermelho.

n (U) = 52

O evento C "obter um rei de naipe vermelho" é C = {R_o, R_c}

n (C) = 2

$p(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

d) a probabilidade de se obter uma carta de espada.

n(U) = 52

O evento D "obter uma carta de espada" é D = { $A_e, 2_e, 3_e, 4_e, 5_e, 6_e, 7_e, 8_e, 9_e, 10_e, V_e, D_e, R_e$ }

n(D) = 13

p(D) = $\frac{n(D)}{n(U)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

7º) No lançamento de dois dados, lendo as faces superiores, calcule:

a) a probabilidade de se obter números iguais nos dois dados.

n(U) = 36, pois teremos 6 · 6 = 36 pares ordenados possíveis.

O evento A "obter números iguais" é A = {(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)}

n(A) = 6

p(A) = $\frac{n(A)}{n(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) a probabilidade de se obter soma igual a 3.

n(U) = 36

O evento B "obter soma igual a 3" é B = {(1, 2); (2, 1)}

n(B) = 2

p(B) = $\frac{n(B)}{n(U)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) a probabilidade de se obter soma igual a 5.

n(U) = 36

O evento C "obter soma igual a 5" é C = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

n(C) = 4

p(C) = $\frac{n(C)}{n(U)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

d) a probabilidade de se obter soma igual a 3 ou 5.

n(U) = 36

O evento D "obter soma igual a 3 ou 5" é D = {(1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

n(D) = 6

p(D) = $\frac{n(D)}{n(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

e) a probabilidade de se obter um número par no 1º dado e um número múltiplo de 5 no 2º dado.

n(U) = 36

O evento E "obter um número par no 1º dado e um número múltiplo de 5 no 2º dado" é E = {(2, 5), (4, 5), (6, 5)}

n(E) = 3

p(E) = $\frac{n(E)}{n(U)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Resumo:

Seja U o conjunto universo de um experimento aleatório, onde $n(U) = n$.

Então:

1º) A probabilidade do evento certo é igual a 1:

$$p(U) = 1$$

2º) A probabilidade do evento impossível é zero:

$$p(\emptyset) = 0$$

3º) A probabilidade de um evento E qualquer, $E \subset U$, é um número real $p(E)$ tal que:

$$0 \leqslant p(E) \leqslant 1$$

4º) A probabilidade de um evento elementar E qualquer é:

$$\frac{1}{n(U)} = \frac{1}{n} \qquad p(E) = \frac{1}{n}$$

5º) A soma das probabilidades de todos os eventos elementares é igual a 1:

$$p(E_1) + p(E_2) + ... + p(E_n) = 1$$

6º) Para os eventos complementares E e $\overline{E}$ vale a relação:

$$p(E) + p(\overline{E}) = 1$$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Considere o lançamento de um dado e calcule a probabilidade do evento:

a) "obter um número par".
b) "obter um divisor de 12".
c) "obter um não divisor de 12".
d) "obter um múltiplo de 3".
e) "obter um número menor ou igual a 5".
f) "obter um número menor que 4".
g) "obter um número menor que 10".
h) "obter um múltiplo de 11".
i) "obter um divisor de 17".

2) Um lote é formado de 10 artigos bons, 3 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Escolhendo ao acaso um artigo, calcule a probabilidade:

a) do artigo ter defeito grave.
b) do artigo ter defeito.
c) do artigo não ter defeito.

3) Retira-se uma carta de um baralho de 52 cartas. Calcule a probabilidade do evento:

a) "obter uma dama".
b) "obter uma carta de ouro".
c) "obter uma carta não de ouro".
d) "obter uma carta de naipe preto".
e) "obter um ás de copas".
f) "obter uma figura".
g) "obter um ás de naipe vermelho".
h) "obter um rei ou uma dama".
i) "obter um ás de naipe vermelho ou um rei de espadas".
j) "obter uma dama de naipe preto ou um ás".

4) Considere o lançamento simultâneo de duas moedas e calcule a probabilidade do evento:

a) "obter faces iguais".
b) "obter faces não iguais".
c) "obter pelo menos uma coroa".
d) "obter no máximo duas caras".
e) "obter três coroas".

5) Considere o lançamento de um dado e de uma moeda e calcule a probabilidade do evento:

a) "obter o número 5 no dado e a face cara na moeda".
b) "obter um número par no dado e a face coroa na moeda".
c) "obter um divisor de 6 no dado e a face cara na moeda".

6) Uma urna contém 2 bolas brancas e 3 vermelhas e uma outra urna contém 1 bola branca e 2 vermelhas. Retirando-se uma bola de cada urna, calcule a probabilidade de que:

a) ambas sejam brancas.
b) ambas sejam vermelhas.
c) a 1ª seja branca e a 2ª seja vermelha.
d) a 1ª seja vermelha e a 2ª seja branca.
e) as duas bolas sejam da mesma cor.
f) as duas bolas sejam de cores diferentes.

RESPOSTAS

1) a) $\frac{3}{6}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{5}{6}$

f) $\frac{1}{2}$

g) 1

h) 0

i) $\frac{1}{6}$

2) a) $\frac{2}{15}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

3) a) $\frac{1}{13}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{52}$

f) $\frac{3}{13}$

g) $\frac{1}{26}$

h) $\frac{2}{13}$

i) $\frac{3}{52}$

j) $\frac{3}{26}$

4) a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) 1

e) 0

5) a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

6) a) $\frac{2}{15}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{8}{15}$

f) $\frac{7}{15}$

Cálculo da Probabilidade de um Evento (Experimentos sem Reposição)

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) saiba identificar eventos mutuamente exclusivos e eventos independentes.

b) adquira técnicas no cálculo de probabilidades: experimentos sem reposição.

Limitaremos o nosso estudo ao cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento em dois casos:

1º caso: o evento pode ou não ser desdobrado em dois ou mais **eventos não independentes** (problemas sem reposição).

2º caso: o evento pode ou não ser desdobrado em dois ou mais **eventos independentes** (problemas com reposição).

ALGUNS CONCEITOS IMPORTANTES PARA O CÁLCULO DE PROBABILIDADES

98. Reunião de eventos:

Seja um experimento aleatório, U o seu conjunto universo e dois eventos $A \subset U$ e $B \subset U$.

A probabilidade da ocorrência do evento A ou do evento B é dada por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

99. Eventos mutuamente exclusivos:

Seja um experimento aleatório, U o seu conjunto universo e dois eventos $A \subset U$ e $B \subset U$.

Dizemos que A e B são eventos mutuamente exclusivos se e somente se $A \cap B = \emptyset$.

Então, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, pois $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$

Exemplo: Em uma retirada de uma carta do baralho de 52 cartas,

o evento A: "retirar um ás" ⟶ $A = \{A_o, A_e, A_c, A_p\}$ e

o evento B: "retirar uma dama" ⟶ $B = \{D_o, D_e, D_c, D_p\}$

são eventos **mutuamente exclusivos**, pois $A \cap B = \emptyset$.

Complete as afirmações abaixo, considerando:

1º) Em um único lançamento de um dado, os eventos:

a) A: "obter o número 5"
B: "obter o número 4" } são eventos *mutuamente* exclusivos, pois $A \cap B$ *=* $\emptyset$.

b) B: "obter o número 4"
C: "obter um número ímpar" } são eventos *mutuamente* exclusivos, pois $B \cap C$ *=* $\emptyset$.

c) B: "obter o número 4"
D: "obter um número par" } são eventos *não mutuamente* exclusivos, pois $B \cap D$ *≠* $\emptyset$.

d) E: "obter um múltiplo de 3"
C: "obter um número ímpar" } são eventos *não mutuamente* exclusivos, pois $E \cap C$ *≠* $\emptyset$.

2º) Em uma retirada de uma carta de um baralho, os eventos:

a) A: "obter um 3"
B: "obter um rei" } são *eventos mutuamente exclusivos*, pois $A \cap B$ *=* $\emptyset$.

b) B: "obter um rei"
C: "obter um rei de naipe preto" } são *eventos não mutuamente exclusivos*, pois $B \cap C$ *≠* $\emptyset$.

c) D: "obter um ás de copas"
E: "obter um ás de paus" } são *eventos mutuamente exclusivos*, pois *$D \cap E = \emptyset$.*

d) F: "obter um naipe vermelho"
G: "obter uma dama" } *são eventos não mutuamente exclusivos, pois $F \cap G \neq \emptyset$.*

100. Eventos independentes:

Seja um experimento aleatório, U o seu conjunto universo e dois eventos $A \subset U$ e $B \subset U$.

Dizemos que A e B são **eventos independentes** quando a ocorrência de um deles independe da ocorrência ou não do outro, isto é, a probabilidade de ocorrência de um deles independe do fato de ter ou não ocorrido o outro.

Exemplo: Seja uma urna com 5 bolas brancas e 2 vermelhas.

I – Em duas retiradas sucessivas de uma bola **com reposição** os eventos
A: "obter uma bola branca na 1ª retirada" e
B: "obter uma bola vermelha na 2ª retirada" são **eventos independentes**, pois a probabilidade de ocorrência do evento B independe da ocorrência do evento A, uma vez que a 1ª bola foi reposta na urna e assim, na 2ª retirada, a urna terá o mesmo número de bolas que na 1ª retirada.

II – Em duas retiradas sucessivas de uma bola **sem reposição** os mesmos eventos A e B do exemplo I são **eventos não independentes**, pois a probabilidade de ocorrência do evento B depende da ocorrência do evento A, uma vez que a 1ª bola não foi reposta e assim a urna terá uma bola a menos na 2ª retirada.

Complete as afirmações abaixo, considerando:

1º) Em dois lançamentos sucessivos de um dado, os eventos:

a) A: "obter 5 no 1º lançamento"
B: "obter 3 no 2º lançamento" } ...são... eventos independentes.

b) C: "obter 3 no 1º lançamento"
D: "obter um múltiplo de 3 no 2º lançamento" } ...são... eventos independentes.

c) E: "obter um número par"
F: "obter um número ímpar" } ...são... eventos independentes.

2º) Em duas retiradas, sucessivas, de uma carta de um baralho de 52 cartas, os eventos:

a) A: "sair um rei na 1ª retirada"
B: "sair uma dama na 2ª retirada",
com reposição da 1ª carta. } ...são... eventos ...independentes...

b) A: "sair um rei na 1ª retirada"
C: "sair uma dama na 2ª retirada",
sem reposição da 1ª carta. } são eventos ...não independentes...

c) D: "sair um rei de ouro na 1ª retirada"
E: "sair uma carta de naipe vermelho na 2ª retirada",
sem reposição da 1ª carta. } são eventos ...não independentes...

d) D: "sair um rei de ouro na 1ª retirada"
F: "sair uma carta de naipe vermelho na 2ª retirada",
com reposição da 1ª carta. } são eventos ...independentes...

3º) Em dois nascimentos sucessivos, os eventos:

a) A: "o 1º filho é menino"
B: "o 2º filho é menina" } são eventos ...independentes...

b) A: "o 1º filho é menino"
C: "o 2º filho é menino" } são eventos ...independentes...

101. Probabilidade condicional:

Seja um experimento aleatório, U o seu conjunto universo, $A \subset U$ e $B \subset U$ dois eventos onde $p(A) \neq 0$.

Chama-se **probabilidade condicional** de B, relativamente a A, a probabilidade do evento B depois de ocorrido o evento A.

Indica-se p(B/A) e lê-se "**probabilidade de B dado que ocorreu A**".

Valem as relações: $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$ e $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ com $p(B) \neq 0$

102. Eventos simultâneos:

Seja um experimento aleatório, U o seu conjunto universo e dois eventos $A \subset U$ e $B \subset U$.

A probabilidade de que ocorram os eventos A e B simultaneamente é dada por:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \quad \text{ou} \quad p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$$

Quando A e B são independentes p(B/A) = p(B) e p(A/B) = p(A), pois a ocorrência de um independe da ocorrência ou não do outro.

Assim:

$$\text{A e B eventos independentes} \iff p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE UM EVENTO (EXPERIMENTO SEM REPOSIÇÃO)

103. Seja um conjunto A com N elementos e seja o experimento "retirar, ao acaso, **n** elementos de A", sem reposição e seja **q** o número de elementos de A com uma mesma característica.

A probabilidade da ocorrência do evento B: "obter **x** elementos com essa característica" ($x \leqslant n$ e $x \leqslant q$) é dada por:

$$p(B) = p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

pois $\binom{N}{n}$ é o total de casos possíveis, isto é, são todas as combinações de N elementos **n a n.**

$\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}$ é o total de casos favoráveis, isto é, são todos os agrupamentos com **n** elementos dos quais **x** têm uma mesma característica e (n – x) não têm essa característica.

Exemplos:

1º) Uma urna contém 10 bolas, sendo 4 vermelhas e 6 brancas. A probabilidade de sair 3 bolas vermelhas em 5 retiradas sem reposição é dada por:

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} N = 10 \text{ (total de bolas)} \\ q = 4 \text{ (total de bolas vermelhas)} \\ x = 3 \text{ (sair 3 bolas vermelhas)} \\ n = 5 \text{ (número de retiradas)} \end{cases}$$

$$\text{portanto: } p(3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{10-4}{5-3}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} \cdot \frac{\frac{4!}{3!\,1!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!}}{\frac{10!}{5!\,5!}} = \frac{5}{21}$$

2º) De um baralho de 52 cartas, retiram-se ao acaso 3 cartas sem reposição. A probabilidade de sair 2 cartas de naipe vermelho é dada por:

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} N = 52 \text{ (total de cartas)} \\ q = 26 \text{ (total de cartas de naipe vermelho)} \\ x = 2 \text{ (sair 2 cartas de naipe vermelho)} \\ n = 3 \text{ (número de retiradas)} \end{cases}$$

$$\text{portanto: } p(2) = \frac{\binom{26}{2} \cdot \binom{52-26}{3-2}}{\binom{52}{3}} = \frac{\binom{26}{2} \cdot \binom{26}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{13}{34}$$

104. Aplicação:

Complete você e calcule:

1º) Uma urna contém 4 bolas pretas e 5 bolas brancas. Qual a probabilidade de sair 2 bolas brancas em 4 retiradas sucessivas sem reposição?

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 4+5 = 9 & \text{(total de bolas)} \\ q = 5 & \text{(total de bolas brancas)} \\ x = 2 & \text{(sair 2 bolas brancas)} \\ n = 4 & \text{(número de retiradas)} \end{cases}$$

portanto: $p(2) = \dfrac{\binom{5}{2} \cdot \binom{9-5}{4-2}}{\binom{9}{4}} = \dfrac{\frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{\frac{9!}{4!5!}} = \dfrac{10}{21}$

2º) Num baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de sair 2 reis em 3 retiradas sucessivas sem reposição?

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 52 & \text{(total de cartas)} \\ q = 4 & \text{(total de reis)} \\ x = 2 & \text{(sair 2 reis)} \\ n = 3 & \text{(número de retiradas)} \end{cases}$$

portanto: $p(2) = \dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{52-4}{3-2}}{\binom{52}{3}} = \dfrac{\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{48!}{1!47!}}{\frac{52!}{3!49!}} = \dfrac{72}{5525}$

3º) Uma urna contém 3 bolas amarelas e 2 bolas brancas. Qual a probabilidade de sair bolas de cores diferentes em 2 retiradas sucessivas sem reposição?
O evento "sair 2 bolas de cores diferentes" em 2 retiradas equivale ao evento "sair apenas 1 bola branca" em 2 retiradas sem reposição, pois isto significa sair 1 branca e 1 não branca. Portanto, basta calcular a probabilidade de sair 1 bola branca em 2 retiradas sem reposição.

Assim:

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 3+2 = 5 & \text{(total de bolas)} \\ q = 2 & \text{(total de bolas brancas)} \\ x = 1 & \text{(sair 1 bola branca)} \\ n = 2 & \text{(número de retiradas)} \end{cases}$$

portanto: $p(1) = \dfrac{\binom{2}{1} \cdot \binom{5-2}{2-1}}{\binom{5}{2}} = \dfrac{2 \cdot \frac{3!}{1!2!}}{\frac{5!}{2!3!}} = \dfrac{3}{5}$

4º) Uma urna contém 5 fichas pretas e 7 fichas amarelas. Qual a probabilidade de sair 2 ou 3 fichas pretas em 4 retiradas sucessivas sem reposição?

O evento E: "sair 2 ou 3 fichas pretas" em 4 retiradas sem reposição equivale à **reunião** dos eventos:

A: "sair 2 fichas pretas" em 4 retiradas sem reposição

B: "sair 3 fichas pretas" em 4 retiradas sem reposição que são eventos mutuamente exclusivos e portanto

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

a) Cálculo de p(A):

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \text{ onde } \begin{cases} N = 12 \text{ (total de fichas)} \\ q = 5 \text{ (total de fichas pretas)} \\ x = 2 \text{ (sair 2 fichas pretas)} \\ n = 4 \text{ (número de retiradas)} \end{cases}$$

$$p(A) = p(2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{12-5}{4-2}}{\binom{12}{4}} = \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{\frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{7!}{2!5!}}{\frac{12!}{4!8!}} = \frac{14}{33}$$

b) Cálculo de p(B):

$$\left.\begin{array}{l} N = 12 \text{ (total de fichas)} \\ q = 5 \text{ (total de fichas pretas)} \\ x = 3 \text{ (sair 3 fichas pretas)} \\ n = 4 \text{ (número de retiradas)} \end{array}\right\} \Rightarrow p(B) = p(3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{12-5}{4-3}}{\binom{12}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{7!}{1!6!}}{\frac{12!}{4!8!}} = \frac{14}{99}$$

Você obteve $p(A) = \frac{14}{33}$ e $p(B) = \frac{14}{99}$ e portanto:

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{14}{33} + \frac{14}{99} = \frac{42 + 14}{99} = \frac{56}{99}$

5º) Num conjunto de 4 valetes e 4 damas, qual a probabilidade de sair 3 valetes ou 4 damas em 6 retiradas sem reposição?

O evento E: "sair 3 valetes ou 4 damas" em 6 retiradas sem reposição equivale à **reunião** dos eventos:

A: "sair 3 valetes" em 6 retiradas sem reposição.

B: "sair 4 damas" em 6 retiradas sem reposição.

Os eventos A e B são mutuamente exclusivos e portanto

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

a) Cálculo de p(A):

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \text{ onde } \begin{cases} N = 8 \text{ (total de cartas)} \\ q = 4 \text{ (total de valetes)} \\ x = 3 \text{ (sair 3 valetes)} \\ n = 6 \text{ (número de retiradas)} \end{cases}$$

$$p(A) = p(3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{8-4}{6-3}}{\binom{8}{6}} = \frac{\frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{4!}{3!1!}}{\frac{8!}{6!2!}} = \frac{4}{7}$$

b) Cálculo de p(B):

$$\left.\begin{array}{l} N = 8 \text{ (total de cartas)} \\ q = 4 \text{ (total de damas)} \\ x = 4 \text{ (sair 4 damas)} \\ n = 6 \text{ (número de retiradas)} \end{array}\right\} \Rightarrow p(B) = p(4) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{8-4}{6-4}}{\binom{8}{6}} =$$

$$= \frac{\frac{4!}{4!0!} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{\frac{8!}{6!2!}} = \frac{3}{14}$$

Você obteve $p(A) = \frac{4}{7}$ e $p(B) = \frac{3}{14}$ e portanto:

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{7} + \frac{3}{14} = \frac{8+3}{14} = \frac{11}{14}$

6º) Uma urna contém 5 fichas pretas e 7 fichas amarelas. Qual a probabilidade de sair pelo menos 1 ficha preta em 4 retiradas sucessivas sem reposição?

O evento E: "sair pelo menos 1 ficha preta" em 4 retiradas sucessivas equivale à **reunião** dos eventos:

A: "sair 1 ficha preta" em 4 retiradas sem reposição
B: "sair 2 fichas pretas" em 4 retiradas sem reposição
C: "sair 3 fichas pretas" em 4 retiradas sem reposição
D: "sair 4 fichas pretas" em 4 retiradas sem reposição

que são eventos mutuamente exclusivos e portanto:

$$p(E) = p(A \cup B \cup C \cup D) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D)$$

O cálculo de p(E) fica mais fácil se usarmos o evento complementar $\bar{E}$: "sair fichas não pretas" em 4 retiradas sucessivas sem reposição, ou $\bar{E}$: "sair **zero** fichas pretas" em 4 retiradas sem reposição.

Então, temos: $p(E) = 1 - p(\bar{E})$.

a) Cálculo de $p(\bar{E})$:

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$ onde

N = 12 (total de fichas)
q = 5 (total de fichas pretas)
x = 0 (sair zero fichas pretas)
n = 4 (número de retiradas)

$$p(\bar{E}) = p(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{12-5}{4-0}}{\binom{12}{4}} = \frac{\frac{5!}{0!5!} \cdot \frac{7!}{4!3!}}{\frac{12!}{4!8!}} = \frac{7}{99}$$

b) Cálculo de p(E):

Você obteve $p(\bar{E}) = \frac{7}{99}$; então $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99}$

7º) Numa sala com 6 rapazes e 4 moças, escolhendo-se ao acaso 3 pessoas para formar uma comissão (sem reposição), qual a probabilidade de se ter pelo menos um rapaz nessa comissão?

evento E: "escolher pelo menos um rapaz"
evento $\bar{E}$: "escolher pessoas não rapazes" ou $\bar{E}$: "escolher **zero** rapazes"

Então, $p(E) = 1 - p(\bar{E})$.

a) Cálculo de $p(\bar{E})$:

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$ onde

N = 10 (total de pessoas)
q = 6 (total de rapazes)
x = 0 (sair zero rapazes)
n = 3 (total de escolhas)

$$p(\bar{E}) = p(0) = \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{10-6}{3-0}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{6!}{0!6!} \cdot \frac{4!}{3!1!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

b) Cálculo de p(E):

$p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

8º) Numa sala com 6 rapazes e 7 moças, escolhendo-se ao acaso 5 pessoas para formar uma comissão, qual a probabilidade de se ter pelo menos 2 rapazes nessa comissão?

evento E: "escolher pelo menos 2 rapazes"

evento $\bar{E}$ é a reunião dos eventos mutuamente exclusivos { A: "escolher zero rapazes"; B: "escolher 1 rapaz" }

Então, $p(\bar{E}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ e $p(E) = 1 - p(\bar{E})$

a) Cálculo de p(A):

$p(x) = \dfrac{\binom{q}{x} \cdot \binom{N-q}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ onde

- N = 13 (total de pessoas)
- q = 6 (total de rapazes)
- x = 0 (sair zero rapazes)
- n = 5 (número de escolhas)

$p(A) = p(0) = \dfrac{\binom{6}{0} \cdot \binom{13-6}{5-0}}{\binom{13}{5}} = \dfrac{\frac{6!}{0!6!} \cdot \frac{7!}{5!2!}}{\frac{13!}{5!8!}} = \dfrac{7}{429}$

b) Cálculo de p(B):

- N = 13 (total de pessoas)
- q = 6 (total de rapazes)
- x = 1 (sair 1 rapaz)
- n = 5 (número de escolhas)

$\Rightarrow p(B) = \dfrac{\binom{6}{1} \cdot \binom{13-6}{5-1}}{\binom{13}{5}} = \dfrac{\frac{6!}{1!5!} \cdot \frac{7!}{4!3!}}{\frac{13!}{5!8!}} = \dfrac{70}{429}$

c) Cálculo de $p(\bar{E})$:

$p(\bar{E}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{7}{429} + \frac{70}{429} = \frac{77}{429}$

Então $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{77}{429} = \frac{429 - 77}{429} = \frac{352}{429}$

9º) Seja uma urna U com 5 bolas vermelhas, 3 bolas pretas e 4 bolas amarelas. Você verá 5 situações diferentes para o cálculo de probabilidade:

I – Calcule a probabilidade de se obter 1 bola vermelha na 1ª retirada e 1 bola preta na 2ª retirada sem reposição da 1ª bola.

evento E: "obter 1 bola vermelha na 1ª retirada e 1 bola preta na 2ª retirada" equivale à ocorrência simultânea dos eventos:

A: "retirar 1 bola vermelha"

B: "retirar 1 bola preta"

que são eventos não independentes, pois a probabilidade da ocorrência de um deles depende da ocorrência ou não do outro e portanto: $p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$.

a) Cálculo de p(A):

$$\left.\begin{array}{ll} N = \text{12} & \text{(total de bolas)} \\ q = \text{5} & \text{(total de bolas vermelhas)} \\ x = \text{1} & \text{(sair a bola vermelha)} \\ n = 1 & \text{(1ª retirada)} \end{array}\right\} \Rightarrow p(A) = p(1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{12-5}{1-1}}{\binom{12}{1}} = \frac{5}{12}$$

b) Cálculo de p(B/A):

$$\left.\begin{array}{ll} N = 11 & \text{(total de bolas depois da 1ª retirada)} \\ q = \text{3} & \text{(total de bolas pretas)} \\ x = \text{1} & \text{(sair 1 bola preta)} \\ n = 1 & \text{(2ª retirada)} \end{array}\right\} \Rightarrow p(B) = p(1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{11-3}{1-1}}{\binom{11}{1}} = \frac{3}{11}$$

c) Cálculo de p(E):

$$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{5}{44}$$

II – Na mesma urna (5V, 3P, 4A), calcule a probabilidade de se obter uma das bolas vermelha e outra preta em 2 retiradas sucessivas sem reposição.

O evento E: "obter uma bola vermelha e uma bola preta" equivale à reunião dos eventos C e D onde:

evento C: "obter uma bola vermelha na 1ª retirada e uma bola preta na 2ª retirada".
evento D: "obter uma bola preta na 1ª retirada e uma bola vermelha na 2ª retirada".

Os eventos C e D são eventos mutuamente exclusivos e portanto $p(E) = p(C \cup D) = p(C) + p(D)$, onde $p(C)$ e $p(D)$ se calculam como no item anterior.

Assim:

$p(C) = p(\text{vermelha} \cap \text{preta}) = p(\text{vermelha}) \cdot p(\text{preta/vermelha}) = \frac{5}{44}$

$p(D) = p(\text{preta} \cap \text{vermelha}) = p(\text{preta}) \cdot p(\text{vermelha/preta}) = \frac{5}{44}$

e

$p(C \cup D) = p(C) + p(D) = \frac{5}{44} + \frac{5}{44} = \frac{10}{44} = \frac{5}{22}$

III – Na mesma urna descrita (5V, 3P, 4A), calcule a probabilidade de se obter 1 bola vermelha, 1 bola preta e 1 bola amarela nessa ordem em 3 retiradas sucessivas sem reposição.

O evento E: "retirar 1 bola vermelha, 1 bola preta e 1 bola amarela" nessa ordem, equivale à ocorrência simultânea dos eventos A, B e C onde:

evento A: "retirar 1 bola vermelha"
evento B: "retirar 1 bola preta"
evento C: "retirar 1 bola amarela"

Os eventos A, B e C são eventos não independentes e portanto

$p(E) = p(A \cap B \cap C) = p(\text{vermelha}) \cdot p(\text{preta/vermelha}) \cdot p(\text{amarela/preta e vermelha})$

a) Cálculo de p(vermelha):

N = 12 (total de bolas)
q = 5 (total de bolas vermelhas)
x = 1 (sair 1 bola vermelha)
n = 1 (1ª retirada)

$\Rightarrow$ p(vermelha) = p(1) = $\dfrac{\binom{5}{1}\binom{12-5}{1-1}}{\binom{12}{1}} = \dfrac{5}{12}$

b) Cálculo de p(preta/vermelha):

N = 11 (total de bolas depois da 1ª retirada)
q = 3 (total de bolas pretas)
x = 1 (sair 1 bola preta)
n = 1 (2ª retirada)

$\Rightarrow$ p(preta/vermelha) = p(1) = $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{11-3}{1-1}}{\binom{11}{1}} = \dfrac{3}{11}$

c) Cálculo de p(amarela/preta e vermelha):

N = 10 (total de bolas depois da 2ª retirada)
q = 4 (total de bolas amarelas)
x = 1 (sair 1 bola amarela)
n = 1 (3ª retirada)

$\Rightarrow$ p(amarela/preta e vermelha) = p(1) = $\dfrac{\binom{4}{1}\binom{10-4}{1-1}}{\binom{10}{1}} = \dfrac{4}{10}$

Portanto:

p(E) = p(vermelha) · p(preta/vermelha) · p(amarela/preta e vermelha) = $\dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{3}{11} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{1}{22}$

IV – Na mesma urna U (5V, 3P, 4A), calcule a probabilidade de se obter uma das bolas vermelha, outra preta e outra amarela em 3 retiradas sucessivas sem reposição.

A probabilidade do evento E: "retirar 1 bola vermelha, 1 bola preta e 1 amarela" em qualquer ordem é

$$p(E) = p(A) \cdot \binom{3}{1,1,1} = p(A) \cdot 3!$$

onde o evento A é "obter 1 bola vermelha, 1 bola preta e 1 bola amarela" nessa ordem, que é o problema do item III, obtendo $p(A) = \frac{1}{22}$.

Logo, $p(E) = p(A) \cdot 3! = \dfrac{1}{22} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \dfrac{3}{11}$

V – Considerando a mesma urna (5V, 3P, 4A), calcule a probabilidade de se retirar 1 bola vermelha e 1 bola preta em 4 retiradas sucessivas sem reposição.

O evento E: "retirar 1 bola vermelha e 1 bola preta" em qualquer ordem, em 4 retiradas, significa "retirar 1 bola vermelha, 1 bola preta e 2 bolas amarelas" em qualquer ordem.

A probabilidade do evento E é $p(E) = p(A) \cdot \binom{4}{1,1,2}$, onde o evento A é "obter 1 bola vermelha, 1 bola preta e 2 bolas amarelas" nessa ordem.

O evento A é equivalente à ocorrência simultânea dos eventos B, C e D onde:

evento B: " obter 1 bola vermelha "
evento C: " obter 1 bola preta "
evento D: " obter 2 bolas amarelas "

Os eventos B, C e D são eventos não independentes e portanto

$p(A) = p(B \cap C \cap D) = p(\text{vermelha}) \cdot$ p(preta/vermelha) · p(amarela/preta e vermelha)

a) Cálculo de p(vermelha):

N = 12 (total de bolas)
q = 5 (total de bolas vermelhas)
x = 1 (sair 1 bola vermelha)
n = 1 (1ª retirada)

$\Rightarrow p(\text{vermelha}) = p(1) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{12-5}{1-1}}{\binom{12}{1}} = \dfrac{5}{12}$

b) Cálculo de p(preta/vermelha):

N = 11 (total de bolas depois da 1ª retirada)
q = 3 (total de bolas pretas)
x = 1 (sair 1 bola preta)
n = 1 (2ª retirada)

$\Rightarrow p(\text{preta/vermelha}) = p(1) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{11-3}{1-1}}{\binom{11}{1}} = \dfrac{3}{11}$

c) Cálculo de p(amarela/preta e vermelha):

N = 10 (total de bolas depois da 2ª retirada)
q = 4 (total de bolas amarelas)
x = 2 (sair duas bolas amarelas)
n = 2 (3ª e 4ª retiradas)

$\Rightarrow p(\text{amarela/preta e vermelha}) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{10-4}{2-2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{6}{45}$

Portanto, $p(A) = p(B \cap C \cap D) = \dfrac{5}{12} \cdot \dfrac{3}{11} \cdot \dfrac{6}{45} = \dfrac{1}{66}$

d) Cálculo de p(E):

$p(E) = p(A) \cdot \binom{4}{1, 1, 2} = \dfrac{1}{66} \cdot \dfrac{4!}{1!\,1!\,2!} = \dfrac{2}{11}$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Uma urna contém 7 bolas pretas e 4 bolas brancas. Retirando-se 4 bolas, sem reposição, qual a probabilidade de que 3 sejam pretas?

2) Uma urna contém 4 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. Retirando-se 4 bolas, sem reposição, qual a probabilidade de que 2 sejam vermelhas?

3) Numa classe de 10 rapazes e 5 moças sorteiam-se 3 alunos para formar uma comissão. Calcule a probabilidade de se ter:
a) uma comissão só de rapazes.
b) uma comissão de 2 rapazes e 1 moça.
c) uma comissão de 1 rapaz e 2 moças.

4) De um baralho de 52 cartas, retiram-se 4 cartas, sem reposição. Qual a probabilidade de se ter 3 ases?

5) Seja um conjunto de cartas de 4 ases e 4 damas. Retirando-se 3 cartas, sem reposição, qual a probabilidade de que todas sejam ases?

6) Uma urna contém 5 bolas brancas, 3 vermelhas e 2 amarelas. Retirando-se 3 bolas, sem reposição, qual a probabilidade de que 2 delas sejam brancas?

7) Num conjunto de cartas se tem 4 ases e 4 damas. Retirando-se 5 cartas, sem reposição, qual a probabilidade de se ter 2 damas ou 3 damas?

8) Numa urna foram colocadas fichas com os números 1, 2, 5, 6, 7, 10, 12 e 15. Retirando-se 3 fichas, sem reposição, qual a probabilidade de se ter um múltiplo de 3 ou 2 divisores de 10?

9) De 12 pessoas, 7 são favoráveis a um tema A e 5 são favoráveis a um tema B. Sorteando-se 4 pessoas, calcule a probabilidade de se ter:
a) 2 pessoas favoráveis ao tema A.
b) 3 pessoas favoráveis ao tema A e 1 pessoa favorável ao tema B.
c) 2 pessoas favoráveis ao tema A ou 4 pessoas favoráveis ao tema B.

10) Numa reunião com 4 rapazes e 8 moças, sorteando-se 3 pessoas, qual a probabilidade de se ter pelo menos uma moça?

11) Uma urna contém 4 bolas pretas e 5 bolas amarelas. Retirando-se 4 bolas, sem reposição, qual a probabilidade de se obter pelo menos 2 bolas amarelas?

12) De um conjunto de 4 reis e 4 damas, retiram-se 3 cartas. Qual a probabilidade de se obter no máximo 1 rei?

13) De um conjunto de 4 reis e 4 damas, retiram-se 3 cartas. Qual a probabilidade de se ter no máximo 2 damas?

14) Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 vermelhas. Retirando-se 3 bolas, sem reposição, calcule a probabilidade de se ter:
a) 3 bolas brancas.
b) 2 bolas brancas e 1 vermelha.
c) pelo menos 2 bolas brancas.
d) no máximo 2 bolas vermelhas.

15) De um conjunto de 4 damas, 4 reis e 4 valetes, retiram-se 4 cartas, sem reposição. Calcule a probabilidade de que:
a) as 4 cartas sejam reis.
b) as duas primeiras sejam reis e as duas últimas sejam damas.
c) duas delas sejam reis e duas sejam damas.
d) duas delas sejam reis e apenas uma seja dama.

16) Uma equipe é formada por 3 moças e 5 rapazes. Escolhendo-se ao acaso 3 elementos dessa equipe, calcule a probabilidade de que:
a) os 3 sejam rapazes.
b) apenas 1 deles seja rapaz.
c) pelo menos 2 sejam moças.
d) no máximo 2 sejam rapazes.
e) o primeiro escolhido seja 1 rapaz e os outros 2 sejam moças.

17) Numa urna há 4 bolas marcadas com os números 2, 3, 4 e 9. Retiram-se 2 bolas, sem reposição, e adicionam-se os números marcados nas bolas. Calcule a probabilidade desta soma ser um múltiplo de 3.

18) Dois temas A e B devem ser votados por 5 membros escolhidos ao acaso de uma equipe de 12 elementos. Calcule a probabilidade do tema A ser escolhido, sabendo-se que 5 são favoráveis ao tema A e os 7 restantes são favoráveis ao tema B.

19) Uma urna contém 5 bolas brancas, 3 vermelhas e 2 amarelas. Retiram-se 3 bolas, sem reposição. Calcule a probabilidade de que:
a) 2 delas sejam brancas.
b) a 1ª seja branca, a 2ª seja vermelha e a 3ª amarela.
c) as 3 bolas sejam de cores diferentes.

20) Num grupo de pessoas, 8 são argentinos, 4 são portugueses e 3 são japoneses. Escolhendo-se ao acaso 5 pessoas, calcule a probabilidade de que:
a) todos sejam argentinos.
b) apenas 2 sejam japoneses e 1 seja português.

RESPOSTAS

1) $N = 11;\ n = 4;\ x = 3;\ q = 7 \Rightarrow p(3) = \frac{14}{33}$

2) $N = 9;\ n = 4;\ x = 2;\ q = 4 \Rightarrow p(2) = \frac{10}{21}$

3) a) $N = 15;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 10 \Rightarrow p(3) = \frac{24}{91}$

b) $N = 15;\ n = 3;\ x = 2;\ q = 10 \Rightarrow p(2) = \frac{45}{91}$

c) $N = 15;\ n = 3;\ x = 1;\ q = 10 \Rightarrow p(1) = \frac{20}{91}$

4) $N = 52;\ n = 4;\ x = 3;\ q = 4 \Rightarrow p(3) = \frac{192}{270725}$

5) $N = 8;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 4 \Rightarrow p(3) = \frac{1}{14}$

6) $N = 10;\ n = 3;\ x = 2;\ q = 5 \Rightarrow p(2) = \frac{5}{12}$

7) A: obter 2 damas: $N = 8;\ n = 5;\ x = 2;\ q = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{3}{7}$

B: obter 3 damas: $N = 8;\ n = 5;\ x = 3;\ q = 4 \Rightarrow p(B) = \frac{3}{7}$

$p(E) = p(A \cup B) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$

8) A: obter 1 múltiplo de 3:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 1;\ q = 3 \Rightarrow p(A) = \frac{15}{28}$

B: obter 2 divisores de 10:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 2;\ q = 4 \Rightarrow p(B) = \frac{3}{7}$

$p(E) = p(A \cup B) = \frac{27}{28}$

9) a) $N = 12;\ n = 4;\ x = 2;\ q = 7 \Rightarrow p(2) = \frac{14}{33}$

b) $N = 12;\ n = 4;\ x = 3;\ q = 7 \Rightarrow p(3) = \frac{35}{99}$

c) A: ter 2 favoráveis ao tema A:

$N = 12;\ n = 4;\ x = 2;\ q = 7 \Rightarrow p(A) = \frac{14}{33}$

B: ter 4 favoráveis ao tema B:

$N = 12;\ n = 4;\ x = 4;\ q = 5 \Rightarrow p(B) = \frac{1}{99}$

$p(E) = p(A \cup B) = \frac{43}{99}$

10) $\overline{E}$: ter 0 moças:

$N = 12;\ n = 3;\ x = 0;\ q = 8 \Rightarrow p(\overline{E}) = \frac{1}{55}\ \therefore\ p(E) = 1 - p(\overline{E}) = \frac{54}{55}$

11) $\overline{E}_1$: obter 0 amarela:

$N = 9;\ n = 4;\ x = 0;\ q = 5 \Rightarrow p(\overline{E}_1) = \frac{1}{126}$

$\overline{E}_2$: obter 1 amarela:

$N = 9;\ n = 4;\ x = 1;\ q = 5 \Rightarrow p(\overline{E}_2) = \frac{10}{63}$

$p(\overline{E}) = p(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2) = \frac{7}{42}$

e

$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = \frac{35}{42}$

12) A: obter 0 rei:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 0;\ q = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{1}{14}$

B: obter 1 rei:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 1;\ q = 4 \Rightarrow p(B) = \frac{3}{7}$

$p(E) = p(A \cup B) = \frac{1}{2}$

13) $\overline{E}$: obter 3 damas:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 4 \Rightarrow p(\overline{E}) = \frac{1}{14}\ \therefore\ p(E) = 1 - p(\overline{E}) = \frac{13}{14}$

14) a) $N = 5;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 3 \Rightarrow p(3) = \frac{1}{10}$

b) $N = 5;\ n = 3;\ x = 2;\ q = 3 \Rightarrow p(2) = \frac{3}{5}$

c) A: obter 2 brancas:

$N = 5;\ n = 3;\ x = 2;\ q = 3 \Rightarrow p(A) = \frac{3}{5}$

B: obter 3 brancas:

$N = 5;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 3 \Rightarrow p(B) = \frac{1}{10}$

$p(E) = p(A \cup B) = \frac{7}{10}$

d) $\overline{E}$: obter 3 vermelhas: evento impossível pois existem apenas 2 bolas vermelhas $\Rightarrow p(\overline{E}) = 0\ \therefore\ p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1$

15) a) $N = 12;\ n = 4;\ x = 4;\ q = 4 \Rightarrow p(4) = \frac{1}{495}$

b) A: obter 2 reis:

$N = 12;\ n = 2;\ x = 2;\ q = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{1}{11}$

B: obter 2 damas:

$N = 10;\ n = 2;\ x = 2;\ q = 4 \Rightarrow p(B/A) = \frac{2}{15}$

$p(E) = p(A \cap B) = \frac{2}{165}$

c) pelo problema anterior, $p(A) = \frac{1}{11}$, $p(B/A) = \frac{2}{15} \Rightarrow p(E) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot \binom{4}{2, 2}\ \therefore\ p(E) = \frac{4}{55}$

d) A: obter uma dama:

$N = 12;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{4}{12}$

B: obter 2 reis:

$N = 11;\ n = 2;\ x = 2;\ q = 4 \Rightarrow p(B/A) = \frac{6}{55}$

C: obter 1 valete:

$N = 9;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 4 \Rightarrow p(C/A, B) = \frac{4}{9}$

$p(E) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A, B) \cdot \binom{4}{1, 2, 1}\ \therefore\ p(E) = \frac{32}{165}$

16) a) $N = 8;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 5 \Rightarrow p(3) = \dfrac{5}{28}$

b) $N = 8;\ n = 3;\ x = 1;\ q = 5 \Rightarrow p(1) = \dfrac{15}{56}$

c) A: escolher 2 moças:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 2;\ q = 3 \Rightarrow p(A) = \dfrac{15}{56}$

B: escolher 3 moças:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 3 \Rightarrow p(B) = \dfrac{1}{56}$

$\Bigg\}\ p(E) = p(A \cup B) = \dfrac{2}{7}$

d) $\overline{E}$: escolher 3 rapazes:

$N = 8;\ n = 3;\ x = 3;\ q = 5 \Rightarrow p(\overline{E}) = \dfrac{5}{28} \quad \therefore \quad p(E) = 1 - p(\overline{E}) = \dfrac{23}{28}$

e) A: escolher 1 rapaz:

$N = 8;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 5 \Rightarrow p(A) = \dfrac{5}{8}$

B: escolher 2 moças:

$N = 7;\ n = 2;\ x = 2;\ q = 3 \Rightarrow p(B/A) = \dfrac{1}{7}$

$\Bigg\}\ p(E) = p(A \cap B) = \dfrac{5}{56}$

17) A: obter o número 2:

$N = 4;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 1 \Rightarrow p(A) = \dfrac{1}{4}$

B: obter o número 4:

$N = 3;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 1 \Rightarrow p(B/A) = \dfrac{1}{3}$

$\Bigg\}\ p(E_1) = p(A \cap B) \cdot \binom{2}{1,\,1} = \dfrac{1}{6}$

C: obter o número 3:

$N = 4;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 1 \Rightarrow p(C) = \dfrac{1}{4}$

D: obter o número 9:

$N = 4;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 1 \Rightarrow p(D/C) = \dfrac{1}{3}$

$\Bigg\}\ p(E_2) = p(C \cap D) \cdot \binom{2}{1,\,1} = \dfrac{1}{6}$ e $p(E) = p(E_1 \cup E_2) = \dfrac{1}{3}$

18) A: obter 5 favoráveis a A:

$N = 12;\ n = 5;\ x = 5;\ q = 5 \Rightarrow p(A) = \dfrac{1}{792}$

B: obter 4 favoráveis a A:

$N = 12;\ n = 5;\ x = 4;\ q = 5 \Rightarrow p(B) = \dfrac{35}{792}$

C: obter 3 favoráveis a A:

$N = 12;\ n = 5;\ x = 3;\ q = 5 \Rightarrow p(C) = \dfrac{210}{792}$

$\Bigg\}\ p(E) = p(A \cup B \cup C) \quad \therefore \quad p(E) = \dfrac{41}{132}$

19) a) $N = 10;\ n = 3;\ x = 2;\ q = 5 \Rightarrow p(2) = \dfrac{5}{12}$

b) A: obter 1 branca:

$N = 10;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 5 \Rightarrow p(A) = \dfrac{1}{2}$

B: obter 1 vermelha:

$N = 9;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 3 \Rightarrow p(B/A) = \dfrac{1}{3}$

C: obter 1 amarela:

$N = 8;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 2 \Rightarrow p(C/A, B) = \dfrac{1}{4}$

$\Bigg\}\ p(E) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A, B) = \dfrac{1}{24}$

c) pelo problema anterior, $p(A) = \dfrac{1}{2};\ p(B/A) = \dfrac{1}{3};\ p(C/A, B) = \dfrac{1}{4}$ e portanto $p(E) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A, B) \cdot \binom{3}{1,\,1,\,1} = \dfrac{1}{4}$

20) a) $N = 15;\ n = 5;\ x = 5;\ q = 8 \Rightarrow p(5) = \dfrac{8}{429}$

b) A: obter 2 japoneses:

$N = 15;\ n = 2;\ x = 2;\ q = 3 \Rightarrow p(A) = \dfrac{1}{35}$

B: obter 1 português:

$N = 13;\ n = 1;\ x = 1;\ q = 4 \Rightarrow p(B/A) = \dfrac{4}{13}$

C: obter 2 argentinos:

$N = 12;\ n = 2;\ x = 2;\ q = 8 \Rightarrow p(C/A, B) = \dfrac{14}{33}$

$\Bigg\}\ p(E) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A, B) \cdot \binom{5}{2,\,1,\,2} = \dfrac{16}{143}$

Cálculo da Probabilidade de um Evento (Experimentos com Reposição)

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

adquira técnicas no cálculo de probabilidades de experimentos com reposição.

---

105. Estudaremos agora o 2º caso do cálculo de probabilidade: o evento pode ou não ser desdobrado em dois ou mais **eventos independentes** (problemas com reposição).

Seja um conjunto **A** com N elementos, um experimento aleatório repetido **n** vezes nas mesmas condições e **q** o número de elementos de A com uma mesma característica.

A probabilidade de que ocorra **x** vezes ($x \leqslant n$) um evento elementar B cujo elemento tem essa mesma característica é dada por:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x}$$

pois $\left(\frac{q}{N}\right)^x$ é a probabilidade do evento elementar B ocorrer **x** vezes.

$\left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x}$ é a probabilidade do evento complementar $\overline{B}$ ocorrer $(n - x)$ vezes.

$\left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x}$ é a probabilidade da ocorrência de B e $\overline{B}$ em **n** experimentos numa certa ordem.

$\binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x}$ é a probabilidade da ocorrência de B e $\overline{B}$ em n experimentos em todas as ordens possíveis.

Exemplos:

1º) Lançando-se um dado 5 vezes, a probabilidade de sair a face 2 quatro vezes é dada por:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} N = 6 \text{ (total de faces de um dado)} \\ q = 1 \text{ (total de face 2)} \\ x = 4 \text{ (sair 4 vezes a face 2)} \\ n = 5 \text{ (número de lançamentos)} \end{cases}$$

portanto: $p(4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-4} = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}$

2º) Uma urna contém 10 bolas, sendo 4 vermelhas e 6 brancas. A probabilidade de sair 3 bolas vermelhas em 5 retiradas **com reposição** é dada por:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 10 \text{ (total de bolas)} \\ q = 4 \text{ (total de bolas vermelhas)} \\ x = 3 \text{ (sair 3 vezes 1 bola vermelha)} \\ n = 5 \text{ (número de retiradas)} \end{cases}$$

portanto: $p(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{4}{10}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{144}{625}$

106. Aplicação:

Complete e calcule:

1º) Uma urna tem 3 bolas brancas e 5 bolas azuis. Qual a probabilidade de sair 3 bolas azuis em 4 retiradas sucessivas, **com reposição?**

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 8 \text{ (total de bolas)} \\ q = 5 \text{ (total de bolas azuis)} \\ x = 3 \text{ (sair 3 vezes 1 bola azul)} \\ n = 4 \text{ (número de retiradas)} \end{cases}$$

$p(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3!\,1!} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^1 = \frac{375}{1024}$

2º) Lançando-se uma moeda 6 vezes, qual é a probabilidade de sair 5 vezes a face cara?

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 2 \text{ (total de faces de 1 moeda)} \\ q = 1 \text{ (total de caras de 1 moeda)} \\ x = 5 \text{ (sair 5 vezes cara)} \\ n = 6 \text{ (número de lançamentos)} \end{cases}$$

$p(5) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-5} = \frac{6!}{5!\,1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{32}$

3º) Lançando-se um dado 5 vezes, qual é a probabilidade de sair 3 vezes um número ímpar ou múltiplo de 4?

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 6 \text{ (total de faces de um dado)} \\ q = 4 \text{ (total de faces ímpares ou múltiplo de 4)} \\ x = 3 \text{ (sair 3 vezes um número ímpar ou múltiplo de 4)} \\ n = 5 \text{ (número de lançamentos)} \end{cases}$$

$p(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{4}{6}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$

4º) Lançando-se um dado 6 vezes, qual é a probabilidade de sair 5 vezes um número par e divisor de 4?

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde} \begin{cases} N = 6 \text{ (total de faces de 1 dado)} \\ q = 2 \text{ (total de faces pares e divisores de 4)} \\ x = 5 \text{ (sair 5 vezes um número par e divisor de 4)} \\ n = 6 \text{ (número de lançamentos)} \end{cases}$$

$p(5) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{2}{6}\right)^{6-5} = \frac{6!}{5!1!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{243}$

5º) Lançando-se um dado 4 vezes qual a probabilidade de sair duas ou três vezes o número cinco?

O evento E: "sair 2 ou 3 vezes o número 5" em 4 lançamentos equivale à reunião dos eventos:

A: "sair 2 vezes o número 5" em 4 lançamentos

B: "sair 3 vezes o número 5" em 4 lançamentos

que são eventos mutuamente exclusivos e portanto:

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

- Cálculo de p(A):

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde}$$

N = 6 (total de faces de 1 dado)
q = 1 (total de faces 5)
x = 2 (sair 2 vezes a face 5)
n = 4 (número de lançamentos)

$p(A) = p(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$

- Cálculo de p(B):

N = 6 (total de faces de 1 dado)
q = 1 (total de faces 5)
x = 3 (sair 3 vezes o número 5)
n = 4 (número de lançamentos)

$\Rightarrow p(B) = p(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{324}$

Você obteve $p(A) = \frac{25}{216}$ e $p(B) = \frac{5}{324}$ e portanto:

$p(E) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{25}{216} + \frac{5}{324} = \frac{85}{648}$

6º) Lançando-se uma moeda 5 vezes, qual a probabilidade de sair a face cara pelo menos 1 vez?

evento E: "sair a face cara pelo menos 1 vez"
evento $\overline{E}$: "sair a face cara zero vezes"

- Cálculo de $p(\overline{E})$:

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{q}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{q}{N}\right)^{n-x} \quad \text{onde}$$

N = 2 (total de faces de 1 moeda)
q = 1 (total de face cara de 1 moeda)
x = 0 (sair zero vezes a face cara)
n = 5 (número de lançamentos)

$p(\overline{E}) = p(0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32}$

- Cálculo de p(E):

$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

7º) Lançando-se uma moeda 5 vezes, qual a probabilidade de sair cara pelo menos 2 vezes?

evento E: "sair a face cara pelo menos 2 vezes"

evento $\overline{E}$: "sair a face cara zero vezes ou uma vez", que é equivalente à reunião dos eventos A: "sair a face cara zero vezes" e B: "sair a face cara uma vez" que são eventos mutuamente exclusivos e portanto:

$p(\overline{E}) = p(A \cup B) =$ $p(A) + p(B)$ e $p(E) = 1 -$ $p(\overline{E})$

- Cálculo de p(A):

N = 2 (total de faces de 1 moeda)

q = 1 (total de faces cara de 1 moeda)

x = 0 (sair zero vezes a face cara)

n = 5 (número de lançamentos)

$\Rightarrow p(A) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{5!}{0!\,5!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

- Cálculo de p(B):

N = 2 (total de faces de 1 moeda)

q = 1 (total de faces cara de 1 moeda)

x = 1 (sair 1 vez a face cara)

n = 5 (número de lançamentos)

$\Rightarrow p(B) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5!}{1!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$

- Cálculo de p(E):

$p(\overline{E}) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}$

e portanto: $p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Uma urna contém 3 bolas vermelhas, 2 bolas brancas e 5 amarelas. Retiram-se 3 bolas, com reposição. Calcule a probabilidade de:

a) se obter 2 bolas vermelhas.
b) se obter 1 bola branca.
c) se obter 3 bolas amarelas.

2) Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 vermelhas. Retiram-se 3 bolas, com reposição. Calcule a probabilidade de:

a) se obter 3 bolas brancas.
b) se obter 2 ou 3 bolas brancas.

3) Um lote é formado de 3 artigos bons e 2 com defeitos. Escolhem-se ao acaso 2 artigos, com reposição. Calcule a probabilidade de:

a) se obter 2 artigos bons.
b) se obter 2 artigos defeituosos.
c) se obter apenas 1 artigo bom.

4) Uma caixa contém 6 bolas brancas e 4 azuis. Retiram-se 4 bolas, com reposição. Calcule a probabilidade de:

a) se obter apenas 2 bolas brancas.
b) se obter apenas 1 bola azul.
c) se obter as 4 bolas da mesma cor.

5) Um lote é formado de 3 artigos bons, 5 artigos com defeitos menores e 2 artigos com defeitos graves. Escolhem-se ao acaso 3 artigos, com reposição. Calcule a probabilidade de:

a) se obter 2 artigos bons.
b) se obter 3 artigos com defeitos menores.
c) se obter 1 artigo com defeito.
d) se obter 1 artigo sem defeito.
e) se obter nenhum deles com defeito.
f) se obter pelo menos 1 sem defeito.
g) se obter no máximo 2 com defeito.

6) Considere um conjunto de cartas com 4 ases e 2 damas. Retiram-se 4 cartas, com reposição. Calcule a probabilidade de:

a) se obter 2 ases.
b) se obter pelo menos 1 dama.
c) se obter 2 ases ou 1 dama.
d) se obter no máximo 1 ás.

RESPOSTAS

1) a) N = 10; n = 3; x = 2; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(2) = \frac{189}{1000}$

b) N = 10; n = 3; x = 1; q = 2 $\Longrightarrow$ $p(1) = \frac{48}{125}$

c) N = 10; n = 3; x = 3; q = 5 $\Longrightarrow$ $p(3) = \frac{1}{8}$

2) a) N = 5; n = 3; x = 3; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(3) = \frac{27}{125}$

b) A: obter 2 bolas brancas:

N = 5; n = 3; x = 2; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(A) = \frac{54}{125}$

B: obter 3 bolas brancas:

N = 5; n = 3; x = 3; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(B) = \frac{27}{125}$

$p(E) = p(A \cup B)$

$\therefore\ p(E) = \frac{81}{125}$

3) a) N = 5; n = 2; x = 2; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(2) = \frac{9}{25}$

b) N = 5; n = 2; x = 2; q = 2 $\Longrightarrow$ $p(2) = \frac{4}{25}$

c) N = 5; n = 2; x = 1; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(1) = \frac{12}{25}$

4) a) N = 10; n = 4; x = 2; q = 6 $\Longrightarrow$ $p(2) = \frac{216}{625}$

b) N = 10; n = 4; x = 1; q = 4 $\Longrightarrow$ $p(1) = \frac{216}{625}$

c) A: obter 4 brancas:

N = 10; n = 4; x = 4; q = 6 $\Longrightarrow$ $p(A) = \frac{81}{625}$

B: obter 4 azuis:

N = 10; n = 4; x = 4; q = 4 $\Longrightarrow$ $p(B) = \frac{16}{625}$

$p(E) = p(A \cup B)$

$\therefore\ p(E) = \frac{97}{625}$

5) a) N = 10; n = 3; x = 2; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(2) = \frac{189}{1000}$

b) N = 10; n = 3; x = 3; q = 5 $\Longrightarrow$ $p(3) = \frac{1}{8}$

c) N = 10; n = 3; x = 1; q = 7 $\Longrightarrow$ $p(1) = \frac{189}{1000}$

d) N = 10; n = 3; x = 1; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(1) = \frac{441}{1000}$

e) N = 10; n = 3; x = 0; q = 7 $\Longrightarrow$ $p(0) = \frac{27}{1000}$

f) $\bar{E}$: obter zero sem defeito:

N = 10; n = 3; x = 0; q = 3 $\Longrightarrow$ $p(\bar{E}) = \frac{343}{1000}$ e $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = \frac{657}{1000}$

g) $\bar{E}$: obter 3 com defeito:

N = 10; n = 3; x = 3; q = 7 $\Longrightarrow$ $p(\bar{E}) = \frac{343}{1000}$ e $p(E) = 1 - p(\bar{E}) = \frac{657}{1000}$

6) a) $N = 6;\ n = 4;\ x = 2;\ q = 4 \Longrightarrow p(2) = \frac{8}{27}$

b) $\overline{E}$: obter zero damas:

$N = 6;\ n = 4;\ x = 0;\ q = 2 \Longrightarrow p(\overline{E}) = \frac{16}{81}$ e $p(E) = 1 - p(\overline{E}) = \frac{65}{81}$

c) A: obter 2 ases:

$N = 6;\ n = 4;\ x = 2;\ q = 4 \Longrightarrow p(A) = \frac{8}{27}$

B: obter 1 dama:

$N = 6;\ n = 4;\ x = 1;\ q = 2 \Longrightarrow p(B) = \frac{32}{81}$

$p(E) = p(A \cup B)$

$\therefore\ p(E) = \frac{56}{81}$

d) A: obter zero ases:

$N = 6;\ n = 4;\ x = 0;\ q = 4 \Longrightarrow p(A) = \frac{1}{81}$

B: obter 1 ás:

$N = 6;\ n = 4;\ x = 1;\ q = 4 \Longrightarrow p(B) = \frac{8}{81}$

$p(E) = p(A \cup B)$

$\therefore\ p(E) = \frac{1}{9}$

Proposições Primitivas
Determinação de Planos

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) se familiarize com os postulados.
b) reconheça e aplique os postulados.
c) saiba reconhecer quando um plano está determinado.

No desenvolvimento da Geometria neste volume, além de admitirmos noções primitivas e proposições primitivas, daremos uma seqüência lógica de proposições fundamentais sem nos atermos às suas demonstrações, mas sim às suas aplicações visando o encaminhamento do raciocínio lógico das demonstrações dessas aplicações.

NOÇÕES PRIMITIVAS

107. São **noções primitivas** as noções de **ponto, reta** e **plano.**

Indicaremos: os **pontos** por letra latinas maiúsculas A, B, C, ...
as **retas** por letras latinas minúsculas a, b, c, ...
os **planos** por letras gregas minúsculas α, β, γ, ...

Representaremos graficamente:

o **ponto** por

a **reta** por ...——————... ou ⟵——⟶

o **plano** por



PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS OU POSTULADOS OU AXIOMAS

108. Postulados da existência:

P-1: Existe ponto, existe reta e existe plano.

P-2: Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.

P-3: Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

109. Postulados da determinação:

P-4: Se dois pontos são distintos, então existe **uma única** reta à qual eles pertencem.

P-5: Se três pontos não pertencem a uma mesma reta (não alinhados), então existe **um único** plano ao qual eles pertencem.

110. Postulados da inclusão:

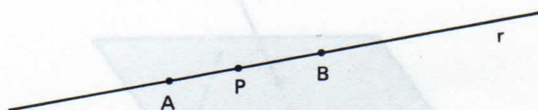
P-6: Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida nesse plano.

111. Postulados da separação:

1º) da reta:

P-7: Um ponto P de uma reta r divide-a em dois conjuntos (semi-retas de origem P) r_1 e r_2 tais que:

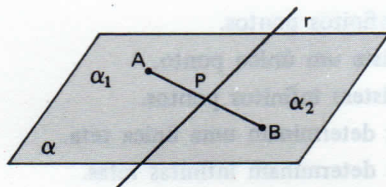
$$r_1 \cap r_2 = \{P\},\ r_1 \cup r_2 = r \text{ e } \left.\begin{array}{l} A \in r_1,\ A \neq P \\ B \in r_2,\ B \neq P \end{array}\right\} \Longrightarrow P \text{ está entre A e B.}$$



2º) do plano:

P-8: Uma reta **r** de um plano α divide-o em dois conjuntos convexos α_1 e α_2 (semiplanos de origem **r**) tais que:

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = r,\ \alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha \quad \text{e} \quad \left.\begin{array}{l} A \in \alpha_1,\ A \notin r \\ B \in \alpha_2,\ B \notin r \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, P \mid \overline{AB} \cap r = \{P\}.$$



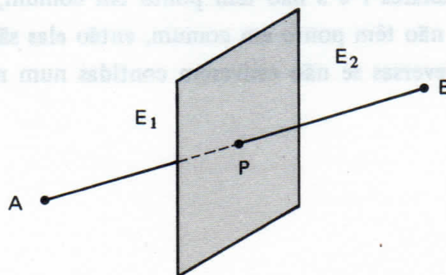
Observação: **Região convexa** é um conjunto de pontos tal que quaisquer que sejam seus pontos A e B distintos, o segmento $\overline{AB}$ está contido nessa região.

3º) do espaço:

Espaço é o conjunto de todos os pontos.

P-9: Um plano α do espaço E divide-o em dois conjuntos convexos E_1 e E_2 (semi-espaço de origem α) tais que:

$$E_1 \cap E_2 = \alpha,\ E_1 \cup E_2 = E \text{ e } \left.\begin{array}{l} A \in E_1,\ A \notin \alpha \\ B \in E_2,\ B \notin \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, P \mid \overline{AB} \cap \alpha = \{P\}.$$

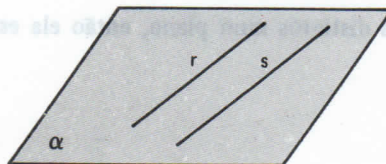


112. Postulado de Euclides:

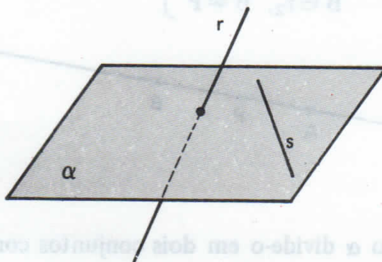
P-10: Por um ponto não pertencente a uma reta existe uma única reta paralela à reta dada.

Observações:

1ª) Duas retas **r** e **s** são paralelas se e somente se são coplanares (estão num mesmo plano) e não têm ponto comum.



2ª) Duas retas **r** e **s** são reversas se e somente se não são coplanares e não têm ponto comum.



113. Aplicação:

1º) Assinale as afirmações corretas, de acordo com os postulados dados:

a. (X) Numa reta existem infinitos pontos.
b. ( ) Fora de uma reta existe um único ponto.
c. (X) Fora de uma reta existem infinitos pontos.
d. (X) Dois pontos distintos determinam uma única reta.
e. ( ) Dois pontos distintos determinam infinitas retas.
f. ( ) Um ponto determina uma única reta.
g. ( ) Dois pontos distintos determinam um único plano.
h. ( ) Três pontos distintos determinam um único plano.
i. (X) Três pontos distintos não colineares determinam um único plano.
j. (X) Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida no plano.
l. (X) Um plano tem infinitos pontos.
m. (X) Todo plano α divide o espaço em dois semi-espaços de origem α.
n. (X) Um plano tem infinitas retas e o espaço tem infinitos planos.
o. ( ) Por um ponto P, não pertencente a uma reta r, existem duas retas distintas paralelas a r.
p. (X) Por um ponto P, não pertencente a uma reta r, existe uma única reta paralela à reta r.
q. ( ) Se duas retas não coplanares r e s não têm ponto em comum, então elas são paralelas.
r. ( ) Se duas retas coplanares r e s não têm ponto em comum, então elas são reversas.
s. (X) Se duas retas r e s não têm ponto em comum, então elas são paralelas se estiverem contidas num mesmo plano ou reversas se não estiverem contidas num mesmo plano.

2º) **Determinação de um plano.**

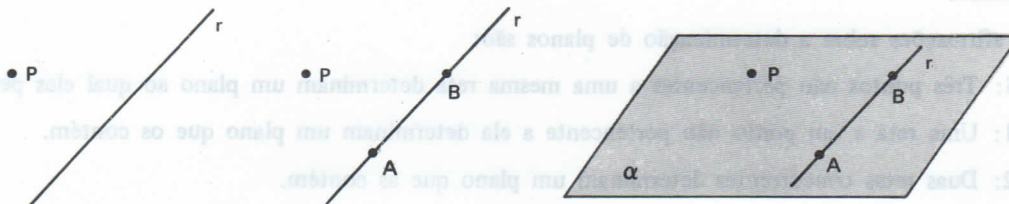
Complete, justificando as afirmações:

a) **Uma reta r e um ponto P não pertencente a r determinam um plano que os contém.**

Devemos mostrar a existência e a unicidade do plano formado por r e $P \notin r$.

Assim:

I – Construção da figura em etapas:



II – Podemos tomar os pontos A e B tais que $A \neq B$, $A \in r$, $B \in r$, pelo postulado P-2, que diz: "Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos."

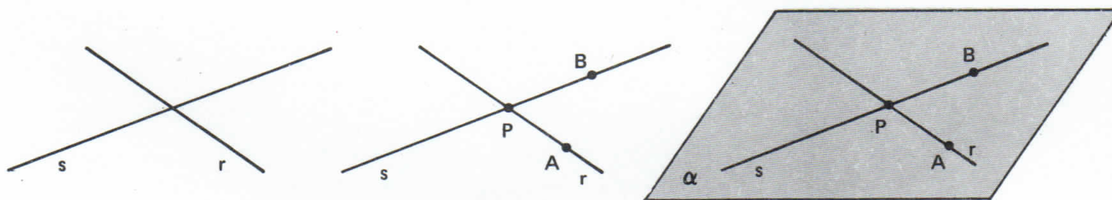
III – Existe um plano α determinado pelos pontos $P \notin r$, $A \in r$ e $B \in r$, pelo postulado P-5, que diz: "Se três pontos não pertencem a uma mesma reta, então existe um único plano ao qual eles pertencem."

IV – **Existência:** o plano α formado pelos três pontos P, A e B é também formado pela reta r e o ponto P, pois $r \subset \alpha$, pelo postulado P-6, que diz: "Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida nesse plano."

V – **Unicidade:** o plano α formado pela reta r e o ponto **P** é o plano formado pelos pontos A, B e P não colineares, que pelo P-5 é **único.**

b) **Duas retas concorrentes r e s determinam um plano que as contém.**

I – Construção da figura em etapas:



II – Seja $r \cap s = \{P\}$ e tomemos $A \neq P$, $A \in$ r e $B \neq P$, $B \in$ s, o que é possível pelo postulado P-2, que diz: "Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos."

III – Existe um plano α determinado pelos pontos P, A e B, pelo postulado P-5, que diz: "Se três pontos não pertencem a uma mesma reta, então existe um único plano ao qual eles pertencem."

IV – **Existência:** o plano α formado pelos três pontos P, A e B é também formado pelas retas r e s, pois $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$, pelo postulado P-6, que diz: "Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida nesse plano."

V – **Unicidade:** o plano formado pelas retas **r** e **s** é o plano formado pelos pontos A, B e P e pelo postulado P-5 este plano é único.

c) **Duas retas paralelas r e s determinam um plano que as contém.**

I – **Existência**: o plano formado por duas retas paralelas sempre existe pela própria definição de retas paralelas, que diz: "Duas retas r e s são paralelas se e somente se são coplanares e não têm ponto em comum."

II – **Unicidade**: esse plano é único, pois podemos considerá-lo como o plano formado por uma reta e um ponto da outra reta.

114. Resumo:

As afirmações sobre a determinação de planos são:

P-5: Três pontos não pertencentes a uma mesma reta determinam um plano ao qual eles pertencem.

T-1: Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um plano que os contém.

T-2: Duas retas concorrentes determinam um plano que as contém.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Mostre que:

a) num plano existem infinitas retas.
b) no espaço existem infinitas retas.
c) no espaço existem infinitos planos.

2) Mostre que se três retas são concorrentes duas a duas e não passam por um mesmo ponto, então elas estão contidas num mesmo plano.

3) Sejam duas retas paralelas e uma terceira reta que as intercepta. Mostre que elas são coplanares.

4) Seja um quadrilátero qualquer no espaço. Mostre que se as retas que contêm dois de seus lados opostos são concorrentes, então o quadrilátero está contido num plano.

Posições Relativas de Retas e Planos
Interseção de Planos

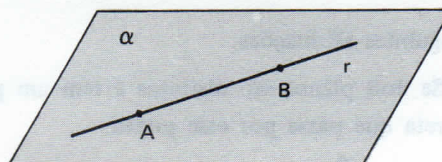
Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça as posições relativas entre retas e planos.
b) conheça algumas proposições fundamentais sobre interseção de planos.
c) saiba aplicar essas proposições para verificar outras afirmações.
d) transfira conhecimentos e perceba uma seqüência lógica no desenvolvimento do conteúdo.

POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO

115. Reta contida em um plano:

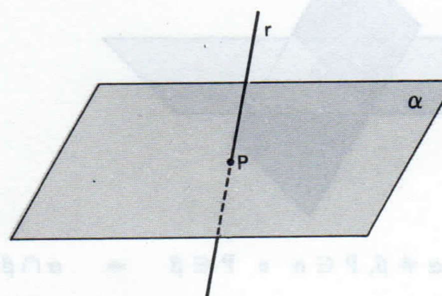
Se a reta e o plano têm dois pontos comuns, então a **reta está contida no plano** (P - 6), ou seja, todos os pontos da reta pertencem ao plano.



$r \cap \alpha = r$

116. Reta concorrente com o plano:

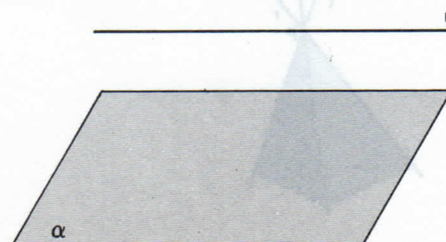
Se a reta e o plano têm apenas um ponto comum, então a reta é concorrente com o plano ("fura" o plano).



$r \cap \alpha = \{P\}$ O ponto P é chamado **traço da reta no plano.**

117. Reta paralela ao plano:

Se a reta e o plano não têm ponto comum, então a reta é **paralela** ao plano.

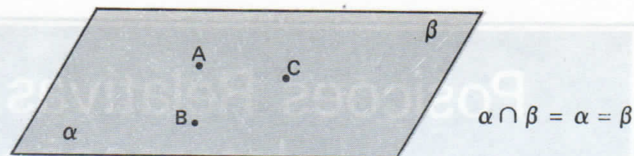


$r \cap \alpha = \emptyset$

POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANOS

118. Planos coincidentes ou iguais:

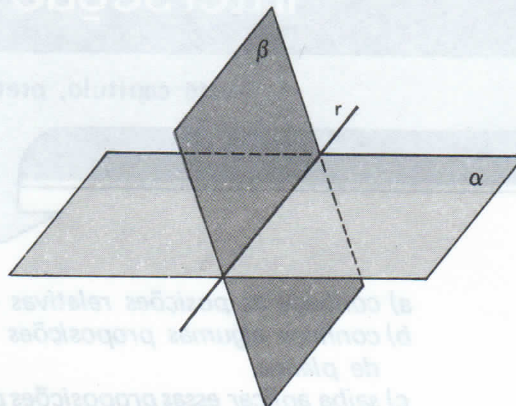
Se os planos α e β têm três pontos comuns, não colineares, então α e β são iguais.



$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

119. Planos secantes ou concorrentes:

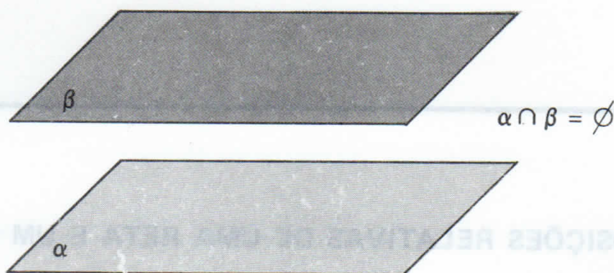
Se os planos α e β têm apenas uma reta **r** em comum, então eles são **secantes.**



$\alpha \cap \beta = r$ A reta **r** é chamada **interseção** de α e β.

120. Planos paralelos:

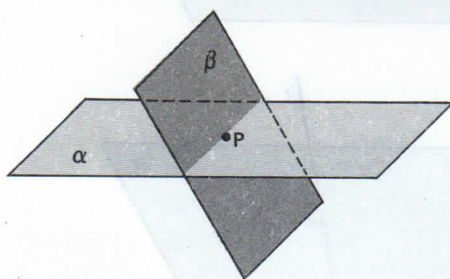
Se os planos α e β não têm ponto comum, então eles são paralelos.

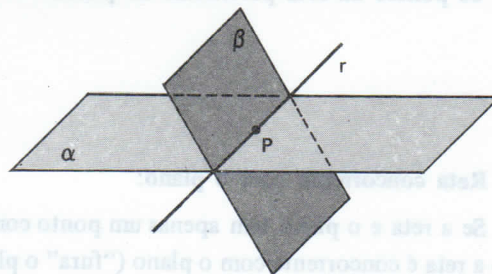


$\alpha \cap \beta = \emptyset$

121. Valem as seguintes afirmações:

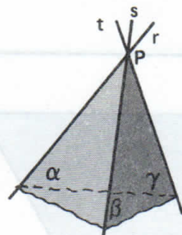
1ª) **T-4:** Se dois planos são distintos e têm um ponto comum, então a interseção dos planos é uma única reta que passa por esse ponto.



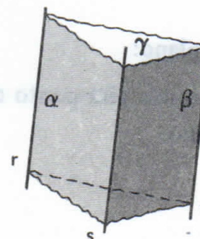


$\alpha \neq \beta, P \in \alpha$ e $P \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = r$ e $P \in r$

2ª) **T-5:** Se três planos são distintos e dois a dois secantes segundo três retas distintas, então ou essas três retas são concorrentes num único ponto ou elas são paralelas duas a duas.



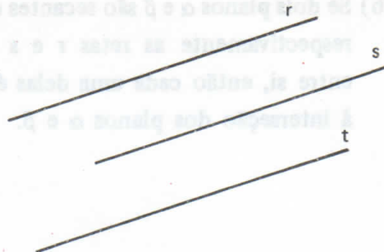
$r \cap s \cap t = \{P\}$



$r /\!/ t$ e $r /\!/ s$ e $t /\!/ s$

3ª) T-6: Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

$$\left.\begin{array}{l} r /\!/ s \\ t /\!/ s \end{array}\right\} \Rightarrow r /\!/ t$$



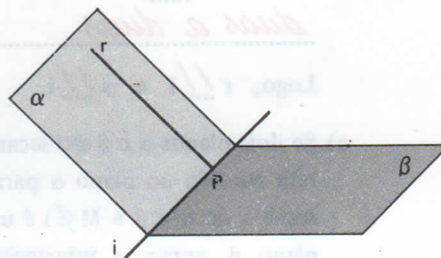
122. Aplicações:

1º) Assinale as afirmações corretas:

a. ( ) Se a reta r e o plano α são concorrentes, então eles têm dois pontos em comum.
b. (X) Se a reta r e o plano α são concorrentes, então eles têm apenas um ponto em comum.
c. (X) $A \neq B$; $A \in r$ e $A \in \alpha$; $B \in r$ e $B \in \alpha \Rightarrow r \subset \alpha$
d. ( ) $A \neq B$; $A \in r$ e $A \in \alpha$; $B \in r$ e $B \notin \alpha \Rightarrow r \subset \alpha$
e. (X) $\forall A$, $A \in r$ e $A \notin \alpha \Rightarrow r \cap \alpha = \emptyset$
f. (X) Se os planos α e β têm em comum uma reta r e um ponto $P \notin r$, então α e β são iguais.
g. (X) $r \neq s$; $r \subset \alpha$ e $r \subset \beta$; $s \subset \alpha$ e $s \subset \beta \Rightarrow \alpha = \beta$
h. ( ) Se os planos α e β têm apenas uma reta em comum, então eles são iguais.
i. (X) Se os planos α e β têm apenas uma reta em comum, então eles são secantes.
j. (X) $\alpha \cap \beta = \emptyset \iff \alpha /\!/ \beta$
l. (X) $\alpha \neq \beta$, $P \in \alpha$ e $P \in \beta \Rightarrow \exists\, r \mid \alpha \cap \beta = r$ e $P \in r$
m. ( ) $\alpha \neq \beta$, $P \in \alpha$ e $P \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{P\}$
n. (X) Se dois planos são secantes, a interseção é sempre uma reta.
o. (X) $r /\!/ s$ e $t /\!/ s \Rightarrow r /\!/ t$
p. ( ) $r /\!/ s$ e $t /\!/ s \Rightarrow r \cap t = \{P\}$

2º) Mostre que são verdadeiras as proposições:

a) Se dois planos α e β são secantes e uma reta r contida no plano α é concorrente com o plano β num ponto P, então o ponto P pertence à interseção de α e β.



dados:
α e β secantes
$r \subset \alpha$ e $r \cap \beta = \{P\}$

mostrar que →

fim:
$P \in \alpha \cap \beta$

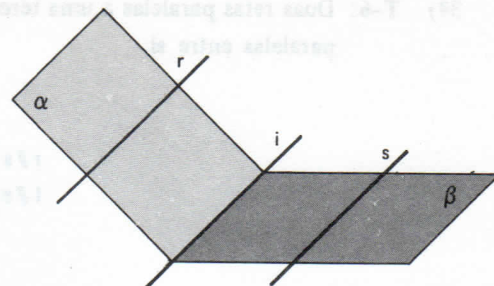
Conseqüência dos dados: $r \subset \alpha$ e $P \in r \Rightarrow P \in \alpha$
$r \cap \beta = \{P\} \Rightarrow P \in \beta$
$\alpha \cap \beta = i$

Para mostrar que P pertence à interseção dos dois planos, basta mostrar que a interseção passa por P.

Então: $\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = i \\ P \in \alpha \\ P \in \beta \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{\text{T-4}}$ a interseção de α e β é uma reta que contém o ponto P.

Logo, a reta $r \subset \alpha$ "fura" o plano β na interseção de α e β, ou seja, P pertence à interseção de α e β.

b) Se dois planos α e β são secantes e contêm respectivamente as retas r e s paralelas entre si, então cada uma delas é paralela à interseção dos planos α e β.



dados:

$\alpha \cap \beta$ são ...secantes...

$r \subset$ ...α...

$s \subset$ ...β...

r ...//... s

$\xrightarrow{\text{mostrar que}}$

fim:

r ...paralela... à $\alpha \cap \beta$

s ...paralela... à $\alpha \cap \beta$

Conseqüência dos dados:

α e β secantes $\Rightarrow \alpha \cap \beta =$ ...i...

$r /\!/ s \xRightarrow{\text{T-3}} \exists$ plano $\gamma \mid r$ ...$\subset$... γ e s ...$\subset$... γ

Então:

$\alpha \cap \beta =$ ...i...

$r \subset \alpha$ e $r \subset \gamma \Rightarrow \alpha \cap \gamma =$ ...r...

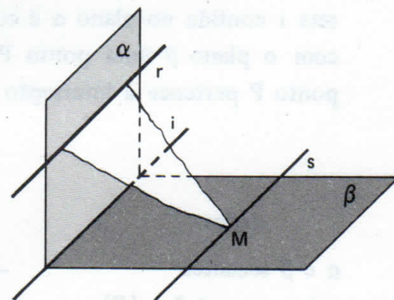
$s \subset \beta$ e $s \subset \gamma \Rightarrow \beta \cap \gamma =$ ...s...

$\xRightarrow{\text{T-5}}$ $r \cap s \cap i =$ ...{P}... ou r ...//... s, s ...//... i, i ...//... r

$r \cap s \cap i = \{$...P...$\}$ contradiz os dados, pois $r /\!/ s$. Portanto as retas r, s e i são ...paralelas duas a duas... .

Logo, r ...//... i e s ...//... i.

c) Se dois planos α e β são secantes, r é uma reta contida no plano α paralela à interseção i de α e β e $M \notin i$ é um ponto do plano β, então, a interseção do plano formado pela reta r e o ponto M com o plano β é uma reta paralela a r.



dados:

α e β são ...secantes...

r ...//... $\alpha \cap \beta$

M ...$\in$... β e M ...$\notin$... i

$\xrightarrow{\text{mostrar que}}$

fim:

$pl(r, M) \cap \beta$ é uma reta paralela à r.

Conseqüência dos dados:

$\alpha \cap \beta =$ ...i...

r ...//... i

M ...$\in$... β

M ...$\in$... pl(r, M)

$\xRightarrow{\text{T-4}}$ a interseção do plano β com o pl(r, M) é uma reta s tal que ...M... $\in$ ...s... .

Devemos mostrar que essa reta s é paralela a r.

Então:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = \underline{\ i\ } \\ \alpha \cap \text{pl}(r, M) = \underline{\ r\ } \\ \beta \cap \text{pl}(r, M) = \underline{\ s\ }\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{T-5}} r \cap s \cap i = \underline{\{P\}} \text{ ou } r \underline{\ /\!/\ } s,\ s \underline{\ /\!/\ } i,\ i \underline{\ /\!/\ } r$$

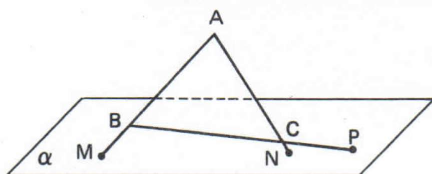
$r \cap s \cap i = \{\underline{P}\}$ contradiz os dados, pois $r /\!/ i$. Portanto as retas r, s e i são *paralelas duas a duas*.

Logo, $s \underline{\ /\!/\ } r$.

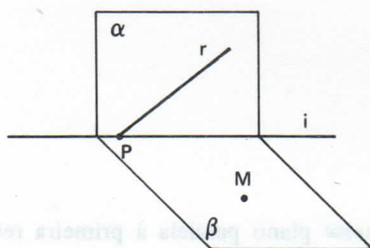
EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

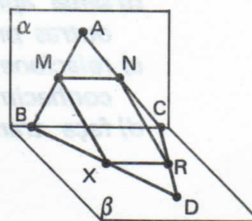
1) Seja um triângulo ABC e M, N e P os pontos em que os prolongamentos dos lados dos triângulos furam o plano α. Mostre que M, N e P são colineares.



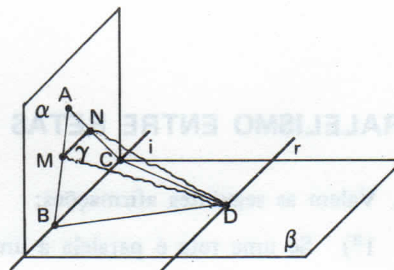
2) Sejam dois planos secantes α e β ($\alpha \cap \beta = i$), $r \subset \alpha$ e P o ponto em que r fura β e seja γ o plano determinado pela reta r e um ponto $M \in \beta$ e $M \notin i$. Mostre que $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$.



3) Dado um quadrilátero reverso ABCD (quadrilátero cujos vértices não estão num mesmo plano), e M o ponto médio de $\overline{AB}$, N o ponto médio de $\overline{AC}$, X o ponto médio de $\overline{BD}$ e R o ponto médio de $\overline{CD}$, mostre que MNXR é um paralelogramo.



4) Dado um quadrilátero reverso ABCD, e M o ponto médio de $\overline{AB}$, N o ponto médio de $\overline{AC}$ e γ o plano determinado por M, N e D, mostre que a interseção de β com γ é paralela a $\overleftrightarrow{MN}$.



Paralelismo

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça as proposições fundamentais do paralelismo de retas e planos e do paralelismo de planos.
b) saiba aplicar as proposições fundamentais para demonstrar outras proposições.
c) relacione os conhecimentos já adquiridos com os novos conhecimentos.
d) faça transferência de conhecimentos.

PARALELISMO ENTRE RETAS E PLANOS

123. Valem as seguintes afirmações:

1ª) Se uma reta é paralela a um plano, então existe uma reta nesse plano paralela à primeira reta.

$r \parallel \alpha \quad \Rightarrow \exists\, s \subset \alpha \mid s \parallel r$

2ª) Se uma reta não contida em um plano é paralela a uma reta desse plano, então a reta é paralela ao plano.

$r \parallel s,\ r \not\subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha \ \Rightarrow r \parallel \alpha$

3ª) Podemos reunir as duas proposições anteriores com o seguinte enunciado:

T-7: Uma condição necessária e suficiente para que uma reta não contida num plano seja paralela ao plano é que ela seja paralela a uma reta do plano.

$r \parallel \alpha \iff r \not\subset \alpha \text{ e } \exists\, s \subset \alpha \mid r \parallel s$

Observação: condição necessária: $r \parallel \alpha \ \Rightarrow r \not\subset \alpha \text{ e } \exists\, s \subset \alpha \mid r \parallel s$

condição suficiente: $r \not\subset \alpha \text{ e } \exists\, s \subset \alpha \mid r \parallel s \implies r \parallel \alpha$

4ª) **T-8:** Se uma reta e um plano têm um ponto comum e são ambos paralelos a uma mesma reta, então a primeira reta está contida no plano.

$$\left.\begin{array}{l} P \in r \text{ e } P \in \alpha \\ r \parallel s \text{ e } \alpha \parallel s \end{array}\right\} \implies r \subset \alpha$$

124. Aplicação:

1º) Assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se duas retas r e s são paralelas e se α é um plano paralelo a r que contém um ponto de s, então α contém s.

b. ( ) $r /\!/ \alpha \Longrightarrow \exists s, s \subset \alpha \mid r \cap s = \{P\}$

c. (X) $r /\!/ \alpha \Longrightarrow \forall s, s \subset \alpha, r \cap s = \emptyset$

d. (X) $r /\!/ \alpha \Longrightarrow \exists s, s \subset \alpha \mid r /\!/ s$

e. (X) Se uma reta é paralela a um plano, então existe uma reta do plano que é paralela à primeira reta.

f. ( ) Se r e s são duas retas paralelas e um plano α contém r e não contém s então s é concorrente com α.

g. (X) Se r e s são duas retas paralelas e um plano α contém r e não contém s, então s é paralela a α.

h. (X) $\left.\begin{array}{l} r /\!/ s,\ s /\!/ \alpha \\ P \in r \text{ e } P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$

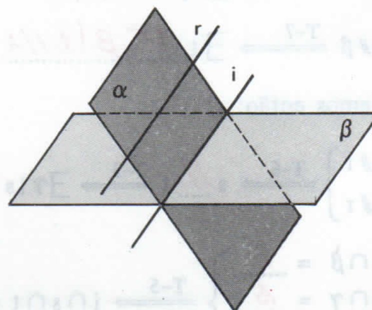
i. ( ) $\left.\begin{array}{l} r /\!/ s,\ s /\!/ \alpha \\ P \in r \text{ e } P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \not\subset \alpha$

j. ( ) Por um ponto fora de um plano existe uma única reta paralela ao plano.

l. (X) Por um ponto fora de um plano existem infinitas paralelas ao plano.

2º) Mostre que são verdadeiras as afirmações:

a) Se dois planos são secantes e uma reta de um deles é paralela ao outro plano, então essa reta é paralela à interseção desses planos.



dados:

α e β secantes, $\alpha \cap \beta = i$

$r \subset \alpha$ e $r /\!/ \beta$

$\xrightarrow{\text{mostrar que}}$

fim: $r /\!/ i$

Conseqüência dos dados:

$\alpha \cap \beta = i \quad \Rightarrow i \subset \alpha$ e $i \subset \beta$

$r /\!/ \beta \quad \Rightarrow r \cap \beta = \emptyset$

$r \subset \alpha \quad \Rightarrow r \cap \alpha = r$

Para mostrar que $r /\!/ i$, basta mostrar que r e i estão contidas num mesmo plano e não têm ponto comum.

De fato:

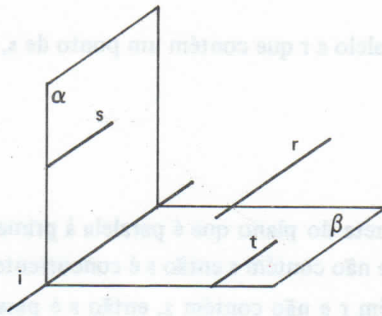
$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ i \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$ r e i são retas coplanares $\Rightarrow$ $r \cap i = \{P\}$ ou $r /\!/ i$

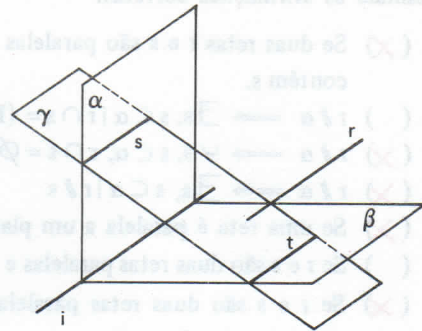
Vejamos qual das duas alternativas $r \cap i = \{P\}$ ou $r /\!/ i$ é verdadeira.

Assim:

$\left.\begin{array}{l} r \cap i = \{P\} \\ i \subset \beta \end{array}\right\} \Longrightarrow$ $P \in i$, $P \in r$ e $P \in \beta \Longrightarrow r \cap \beta = \{P\}$, o que contradiz os dados, pois $r /\!/ \beta$.
Logo a 2ª alternativa é verdadeira, isto é, $r /\!/ i$.

b) Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à interseção desses planos.





dados: **fim:**

α e β secantes, $\alpha \cap \beta = i$ $\xrightarrow{\text{mostrar que}}$ $r \,/\!/\, i$

$r \,/\!/\, \alpha$ e $r \,/\!/\, \beta$

Conseqüência dos dados:

$r /\!/ \alpha \overset{\text{T-7}}{\Longrightarrow} \exists\, s,\ s \subset \alpha \mid s /\!/ r$

$r /\!/ \beta \overset{\text{T-7}}{\Longrightarrow} \exists\, t,\ t \subset \beta \mid t /\!/ r$

Temos então:

$\left.\begin{matrix} s /\!/ r \\ t /\!/ r \end{matrix}\right\} \overset{\text{T-6}}{\Longrightarrow} s /\!/ t \overset{\text{T-3}}{\Longrightarrow} \exists \gamma \mid s \subset \gamma$ e $t \subset \gamma$

$\left.\begin{matrix} \alpha \cap \beta = i \\ \alpha \cap \gamma = s \\ \beta \cap \gamma = t \end{matrix}\right\} \overset{\text{T-5}}{\Longrightarrow} i \cap s \cap t = \{P\}$ ou $i /\!/ s$, $i /\!/ t$ e $s /\!/ t$

Vejamos qual das duas alternativas é a verdadeira:

$i \cap s \cap t = \{P\}$ é falso pois $s /\!/ t$; logo a alternativa verdadeira é $i /\!/ s$, $i /\!/ t$ e $s /\!/ t$

Como: $\left.\begin{matrix} i /\!/ s \\ s /\!/ r \end{matrix}\right\} \overset{\text{T-6}}{\Longrightarrow} r /\!/ i$

125. Resumo:

No paralelismo entre reta e plano, valem as seguintes afirmações:

1ª) **T-7:** Uma condição necessária e suficiente para que uma reta não contida num plano seja paralela ao plano é que ela seja paralela a uma reta do plano.

$r /\!/ \alpha \Longleftrightarrow r \not\subset \alpha$ e $\exists\, s \subset \alpha \mid r /\!/ s$

2ª) **T-8:** Se uma reta e um plano têm um ponto comum e são ambos paralelos a uma mesma reta, então a primeira reta está contida no plano.

$\left.\begin{matrix} P \in r \text{ e } P \in \alpha \\ r /\!/ s \text{ e } \alpha /\!/ s \end{matrix}\right\} \Longrightarrow r \subset \alpha$

3ª) **T-9:** Se dois planos são secantes e uma reta de um deles é paralela ao outro plano, então essa reta é paralela à interseção desses planos.

$\alpha \cap \beta = i,\ r \subset \alpha$ e $r /\!/ \beta \Longrightarrow r /\!/ i$

4ª) T-10: Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à interseção desses planos.

$\alpha \cap \beta = i, \ r /\!/ \alpha \ \text{ e } \ r /\!/ \beta \Longrightarrow r /\!/ i$

PARALELISMO ENTRE PLANOS

126. Vale a seguinte proposição fundamental:

T-11: Uma condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes que sejam paralelas ao outro plano.

$\alpha /\!/ \beta \Longleftrightarrow \exists\, r \subset \alpha, \ \exists\, s \subset \alpha, \ r \cap s = \{P\} \mid r /\!/ \beta \ \text{ e } \ s /\!/ \beta$

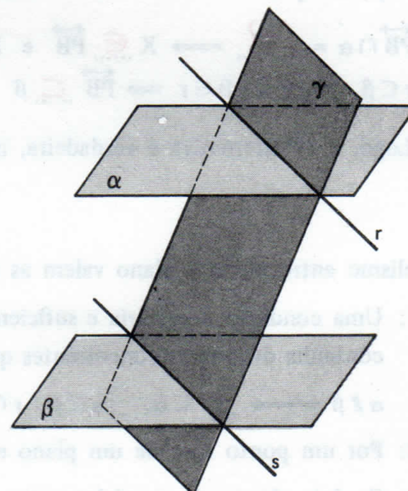
127. Aplicações:

1º) Assinale as afirmações corretas:

a. (X) O espaço tem infinitos planos.
b. ( ) Por um ponto fora de um plano existe uma única reta concorrente com esse plano.
c. (X) Por um ponto fora de um plano existem infinitas retas concorrentes a esse plano.
d. (X) Se dois planos são paralelos entre si, então toda reta contida num deles é paralela ao outro plano.
e. ( ) Se uma reta r está contida num plano α e r é paralela a um plano β então α é paralelo a β.
f. (X) Se duas retas concorrentes estão contidas num plano α e são ambas paralelas a um plano β, então $\alpha /\!/ \beta$.
g. (X) $r \subset \alpha, \ s \subset \alpha, \ r \cap s = \{P\}$ e $r /\!/ \beta$ e $s /\!/ \beta \Longrightarrow \alpha /\!/ \beta$
h. (X) Por um ponto fora de um plano existe um único plano paralelo ao primeiro plano.
i. ( ) Por um ponto fora de um plano existem dois planos paralelos ao primeiro plano.
j. (X) Se dois planos são paralelos entre si, toda reta que encontra um deles encontra também o outro.
l. (X) Se dois planos são paralelos entre si e um terceiro plano é secante com um deles, então ele é secante com o outro.

2º) Mostre que valem as afirmações:

a) Se dois planos distintos α e β, paralelos entre si, são interceptados por um terceiro, então as interseções são paralelas entre si.



dados: **fim:**

α .//. β
α .∩. $\gamma = r$ $\xrightarrow{\text{mostrar que}}$ r // s
β .∩. $\gamma = s$

Conseqüência dos dados:

$\alpha /\!/ \beta \Longrightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$
$\alpha \cap \gamma = r \Rightarrow r \subset \alpha$ e $r \subset \gamma$
$\beta \cap \gamma = s \Rightarrow s \subset \beta$ e $s \subset \gamma$

Para mostrar que r e s são paralelas basta mostrar que r e s são coplanares e não têm ponto comum.
De fato:

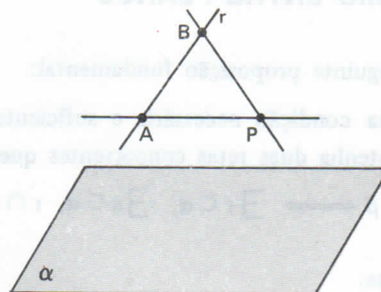
$r \subset \gamma$ e $s \subset \gamma \Longrightarrow$ r e s coplanares $\Longrightarrow r \cap s = \{P\}$ ou $r /\!/ s$

Vejamos qual das alternativas é verdadeira. Assim:

$r \cap s = \{P\} \Longrightarrow P \in r$ e $P \in s$ } $\Longrightarrow P \in \alpha$ e $P \in \beta \Longrightarrow \alpha \cap \beta = \{P\}$, o que contradiz os dados, pois $\alpha \cap \beta = \emptyset$.
como $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$

Logo, a 2ª alternativa é verdadeira, ou seja, $r \,//\, s$.

b) Seja uma reta r paralela a um plano α, um ponto A pertencente a r, um ponto P não pertencente a r e não pertencente a α.



Se a reta $\overleftrightarrow{PA}$ é paralela ao plano α, então qualquer que seja o ponto B pertencente à reta r, $\overleftrightarrow{PB}$ é paralela ao plano α.

dados:
$r \,//\, \alpha$, $P \notin \alpha$ e $P \notin r$
$A \in r$ e $\overleftrightarrow{PA} \,//\, \alpha$
$B \in r$, B qualquer

$\xrightarrow{\text{mostrar que}}$

fim: $\overleftrightarrow{PB} \,//\, \alpha$

Conseqüência dos dados:

$P \notin r$ e $A \in r \Longrightarrow \overleftrightarrow{PA} \cap r = \{A\}$, isto é, $\overleftrightarrow{PA}$ e r são concorrentes.

$r \,//\, \alpha$, $\overleftrightarrow{PA} \,//\, \alpha$
$\overleftrightarrow{PA}$ e r concorrentes } $\xrightarrow{\text{T-11}}$ o plano β formado pelas retas r e $\overleftrightarrow{PA}$ é paralelo a α, então $\alpha \cap \beta = \emptyset$, $r \subset \beta$ e $P \in \beta$.

Para mostrar que $\overleftrightarrow{PB} \,//\, \alpha$, basta mostrar que a reta $\overleftrightarrow{PB}$ e o plano α não têm ponto comum.

De fato:

$P \notin \alpha \Rightarrow \overleftrightarrow{PB} \not\subset \alpha \Rightarrow \overleftrightarrow{PB} \,//\, \alpha$ ou $\overleftrightarrow{PB} \cap \alpha = \{X\}$

Vejamos qual das alternativas é verdadeira:

$\overleftrightarrow{PB} \cap \alpha = \{X\} \Longrightarrow X \in \overleftrightarrow{PB}$ e $X \in \alpha$
$r \subset \beta$, $P \in \beta$ e $B \in r \Longrightarrow \overleftrightarrow{PB} \subset \beta$
} $\Longrightarrow X \in \alpha \cap \beta$ o que contradiz o fato de $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Logo, a 1ª alternativa é verdadeira, isto é, $\overleftrightarrow{PB} \,//\, \alpha$ qualquer que seja o ponto $B \in r$.

128. Resumo:

No paralelismo entre plano e plano valem as afirmações:

1ª) **T-11:** Uma condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes que sejam paralelas ao outro plano.

$$\alpha \,//\, \beta \Longleftrightarrow \exists\, r \subset \alpha,\ \exists\, s \subset \alpha,\ r \cap s = \{P\} \mid r \,//\, \beta \text{ e } s \,//\, \beta$$

2ª) **T-12:** Por um ponto fora de um plano existe um único plano paralelo ao primeiro plano.

3ª) **T-13:** Se dois planos são paralelos entre si e uma reta é concorrente com um deles, então ela encontra também o outro.

4ª) **T-14:** Se dois planos são paralelos entre si e um terceiro plano é secante com um deles, então ele é secante com o outro.

5ª) **T-15:** Se dois planos distintos α e β, paralelos entre si, são interceptados por um terceiro, então as interseções são paralelas entre si.

6ª) **T-16**: (Tales): Um feixe de planos paralelos que encontra duas retas transversais determina sobre elas dois conjuntos de segmentos proporcionais.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

Mostre que são verdadeiras as seguintes afirmações:

1) Se uma reta é paralela à interseção de dois planos, então ela é paralela aos dois planos.

2) Se dois planos α e β são paralelos, então toda reta contida num deles é paralela ao outro.

3) Se duas retas r e s de um plano α são paralelas e $P \notin \alpha$, então a interseção dos planos pl (r, P) e pl (s, P) é paralela a α.

4) Dadas duas retas reversas r e s e um ponto P não pertencente a essas retas, existe sempre um plano paralelo às retas r e s, passando por P.

5) Se dois planos paralelos interceptam duas retas paralelas, então os segmentos determinados sobre essas retas são congruentes.

6) Dados os pontos A, B, C e um plano α tal que $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \notin \alpha$, a reta que passa por M e N, pontos médios de $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, é paralela ao plano α.

7) Dadas duas retas concorrentes r e s e um ponto P, $P \notin$ pl (r, s), a reta que passa pelos pontos Q e R, simétricos de P em relação às retas r e s, é paralela ao plano determinado por r e s.

Perpendicularismo

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça as proposições fundamentais do perpendicularismo de retas e planos e do perpendicularismo de planos.
b) saiba aplicar as proposições fundamentais para demonstrar outras proposições.
c) relacione os conhecimentos já adquiridos com os novos conhecimentos.
d) faça transferência de conhecimentos.

PERPENDICULARISMO ENTRE RETA E PLANO

129. Definição: uma reta **r** é perpendicular a um plano α quando o encontra num ponto e é perpendicular a todas as retas do plano α que passam por esse ponto.

Em símbolos:

$$r \perp \alpha \iff \begin{cases} 1^{\circ}) \ r \cap \alpha = \{P\} \\ 2^{\circ}) \ r \perp s, \ \forall s \subset \alpha \ \text{ e } \ P \in s \end{cases}$$

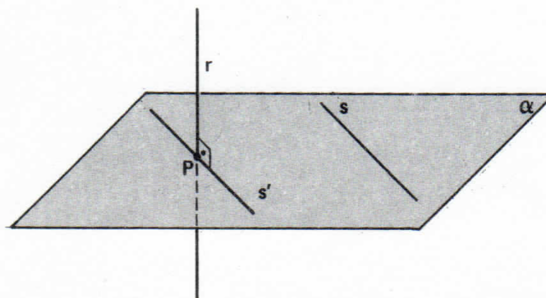
130. Valem as seguintes afirmações:

1ª) **T-17:** Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano.

$$r \perp \alpha \iff r \cap \alpha = \{P\} \ \text{ e } \ \exists s, t; \ s \subset \alpha, \ t \subset \alpha \mid r \perp s \ \text{ e } \ r \perp t$$

2ª) **T-18:** Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

Observação: duas retas r e s são ortogonais se e somente se sendo s' paralela a s por um ponto P de r, s' é perpendicular à reta r.
Indica-se r ortogonal a s por $r \perp s$.



131. Aplicações:

1º) Assinale as afirmações corretas:

a. (X) Se uma reta é perpendicular a um plano α num ponto $P \in \alpha$, então ela é perpendicular a todas as retas de α que passam por P.

b. ( ) Se uma reta é perpendicular a um plano α num ponto $P \in \alpha$, então ela é perpendicular a todas as retas do plano α.

c. ( ) Por um ponto P fora de um plano α, existem infinitas retas perpendiculares a α.

d. (X) Por um ponto P fora de um plano α, existe uma única reta perpendicular a α.

e. (X) Por um ponto P pertencente a um plano α, existe uma única reta perpendicular a α.

f. ( ) Por um ponto P pertencente a um plano α, existem infinitas retas perpendiculares a α.

g. ( ) Se uma reta é perpendicular a apenas uma reta de um plano α, então ela é perpendicular a α.

h. (X) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

i. (X) Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são paralelas entre si.

j. ( ) Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são concorrentes.

l. (X) Dois planos distintos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos entre si.

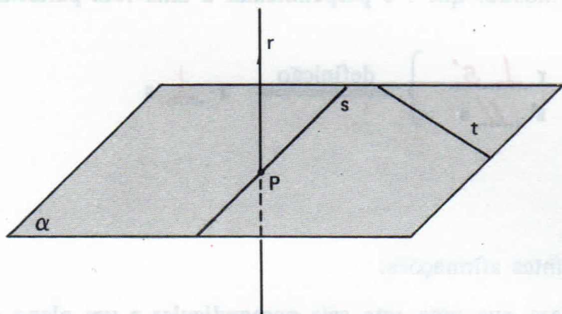
m. ( ) Dois planos distintos perpendiculares a uma mesma reta são secantes.

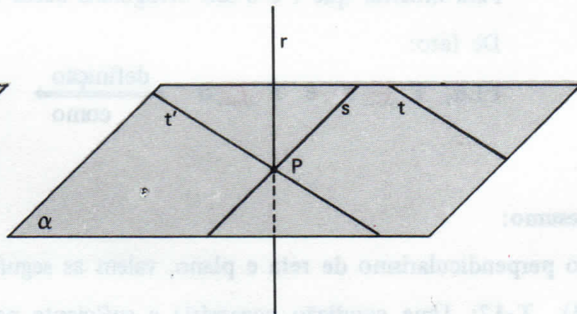
n. (X) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então α é perpendicular a r.

o. (X) Se dois planos são paralelos entre si, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular também ao outro.

2º) Mostre que são verdadeiras as proposições:

a) Se uma reta r é perpendicular a uma reta s de um plano α e ortogonal a uma outra reta t desse plano, não paralela a s, então a reta r é perpendicular a α.





dados:

$r \perp s$ e $s \subset \alpha$
$r \perp t$ $t \subset \alpha$ e $t \not\parallel s$

$\xrightarrow{\text{mostrar que}}$

fim: $r \perp \alpha$

Conseqüência dos dados:

$r \perp s$ e $s \subset \alpha \Rightarrow r \cap s = \{P\}$, $r \cap \alpha = \{P\}$ e $P \in \alpha$ é o traço de r em α.

$r \perp t \xrightarrow{\text{definição}}$ sendo $t' \parallel t$ por um ponto de r, $t' \perp r$

Para mostrar que r é perpendicular ao plano α basta mostrar que r é perpendicular a duas retas concorrentes de α.

De fato:

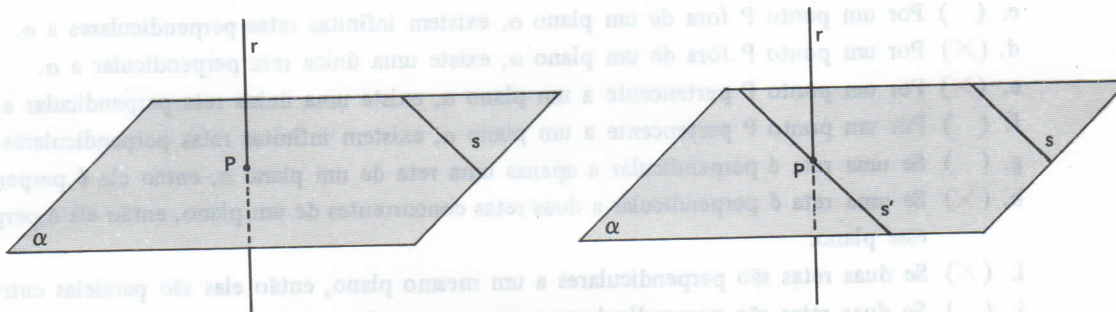
$t \subset \alpha$ e $P \in \alpha \xrightarrow{\text{P-10 (Euclides)}} \exists\, t' \subset \alpha \mid P \in t'$ e $t' \parallel t$.

$\left.\begin{matrix} t' \parallel t \\ r \perp t \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{definição}} r \perp t'$

$r \perp$ ..t'.. e t' ..⊂.. α
r ..⊥.. s e s ⊂ ..α..
t' ∩ s = ..{P}..

—T-17→ r ⊥ ..α..

b) Seja uma reta r perpendicular a um plano α e uma reta s contida em α não passando pelo traço de r em α. Mostre que r e s são ortogonais.



dados:

r ..⊥.. α e r ∩ α = ..{P}..
s ..⊂.. α e P ..∉.. s

fim:

—mostrar que→ ..r ⊥ s..

Conseqüência dos dados:

$r \perp \alpha$ e $r \cap \alpha = \{P\}$ —definição→ r é ..perpendicular.. a todas as retas de α que passam ..por P..

$s \subset \alpha$ e $P \notin s$ —P-10 (Euclides)→ ∃ s' ..⊂.. α | P ..∈.. s' e s' ..//.. s

Para mostrar que r e s são ortogonais basta mostrar que r é perpendicular a uma reta paralela a s.

De fato:

$r \perp \alpha$, P ..∈.. s' e s' ..⊂.. α —definição como→ r ..⊥ s'.. ; s' ..//.. s —definição→ r ..⊥.. s

132. Resumo:

No perpendicularismo de reta e plano, valem as seguintes afirmações:

1ª) **T-17:** Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano.

$r \perp \alpha \iff r \cap \alpha = \{P\}$ e $\exists\, s, t \subset \alpha \mid r \perp s$ e $r \perp t$

2ª) **T-18:** Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

r ⊥̇ s e r ⊥̇ t, r e s ⊂ α, $s \cap t = \{P\} \Rightarrow r \perp \alpha$

3ª) **T-19:** Por um ponto P, existe uma única reta perpendicular a α.

4ª) **T-20:** Se dois planos são perpendiculares a uma mesma reta, então são paralelos entre si.

5ª) **T-21:** Se duas retas são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são paralelas entre si.

6ª) **T-22:** Se dois planos são paralelos entre si, então toda reta perpendicular a um deles é perpendicular também ao outro.

7ª) **T-23:** Se uma reta r é perpendicular a uma reta s de um plano α e ortogonal a uma outra reta t desse plano, não paralela a s, então a reta r é perpendicular a α.

PERPENDICULARISMO DE PLANO E PLANO

133. Definição: dois planos são perpendiculares entre si se e somente se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

$\alpha \perp \beta \iff \exists\, r \subset \alpha \mid r \perp \beta$

134. Valem as seguintes afirmações:

1ª) **T-24:** Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta de um deles é perpendicular à interseção, então essa reta é perpendicular ao outro plano.

$\alpha \perp \beta,\ r \subset \alpha,\ r \perp \alpha \cap \beta \Rightarrow r \perp \beta$

2ª) **T-25:** Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta perpendicular a um deles tem um ponto comum com o outro, então ela está contida nesse outro.

3ª) **T-26:** Por uma reta não perpendicular a um plano existe um único plano perpendicular ao primeiro plano.

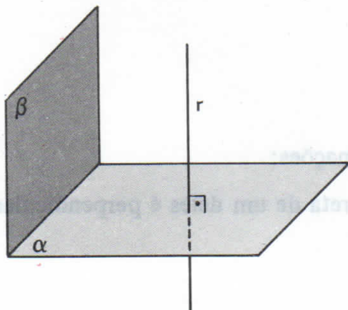
135. Aplicações:

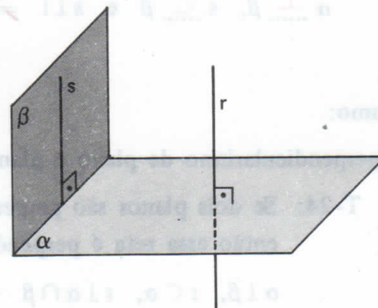
1º) Assinale as afirmações corretas:

a. (X) Um plano α é perpendicular a um plano β se e somente se α contém uma reta perpendicular a β.
b. ( ) $r \subset \alpha,\ r \cap \beta = \{P\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$
c. (X) $r \subset \alpha$ e $r \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$
d. (X) Um plano α perpendicular a uma reta de um plano β é perpendicular a β.
e. ( ) Se α e β são perpendiculares, então todas as retas de α são perpendiculares a β.
f. (X) Se α e β são perpendiculares, então toda reta de α perpendicular à interseção de α e β é perpendicular ao plano β.
g. (X) $\alpha \perp \beta,\ \alpha \cap \beta = i,\ r \subset \alpha$ e $r \perp i \Rightarrow r \perp \beta$
h. ( ) Se α e β são secantes e α contém uma reta perpendicular à interseção, então α e β são perpendiculares.
i. (X) Por uma reta perpendicular a um plano α, existem infinitos planos perpendiculares a α.
j. ( ) Por uma reta perpendicular a um plano α, existe um único plano perpendicular a α.
l. (X) $\alpha \perp \beta,\ r \perp \beta$ e $r \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow r \subset \alpha$
m. ( ) $\alpha \perp \beta$ e $r \perp \beta \Rightarrow r \subset \alpha$

2º) Mostre que são verdadeiras as afirmações:

a) Se α e β são dois planos perpendiculares e uma reta r é perpendicular a α, então r é paralela a β.





dados: $\alpha \perp \beta$, $r \perp \alpha$ — mostrar que → **fim:** $r \parallel \beta$

Conseqüência dos dados:

$\alpha \perp \beta \xrightarrow{\text{definição}} \exists\, s \subset \beta \mid s \perp \alpha$

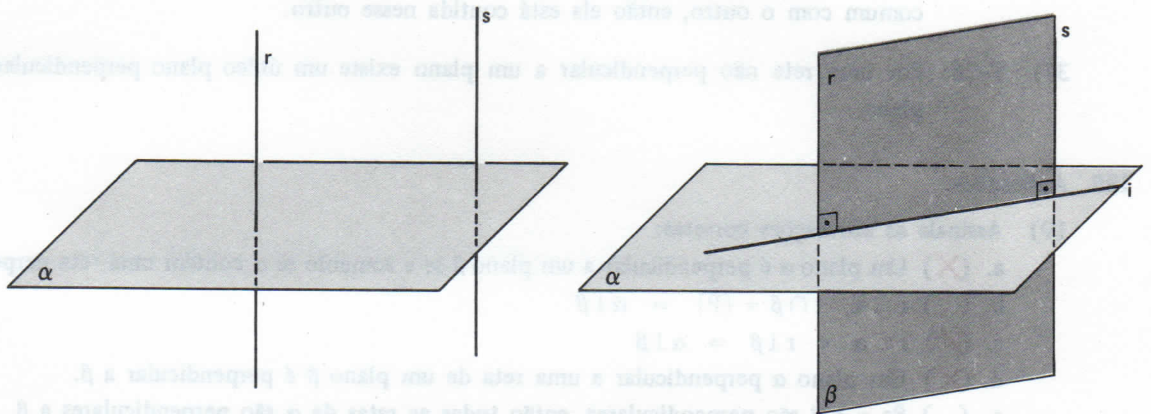
$r \perp \alpha \xrightarrow{\text{definição}}$ toda reta de α, pelo traço de r em α é perpendicular a r.

Para mostrar que $r \parallel \beta$ basta mostrar que r é paralela a uma reta de β.

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \text{ e } s \perp \alpha \xrightarrow{\text{T-21}} r \parallel s \\ s \subset \beta \\ r \not\subset \beta \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{T-7}} r \parallel \beta$$

b) Se duas retas r e s são paralelas entre si e se um plano α é perpendicular a r, então α é perpendicular a s.



dados:

$\left.\begin{array}{l} r \parallel s \\ r \perp \alpha \end{array}\right\}$ mostrar que

fim:

$\alpha \perp s$

Conseqüência dos dados:

$r \parallel s \Rightarrow \exists\, \beta \mid r \subset \beta$ e $s \subset \beta$ e $\beta \cap \alpha = i$

$\alpha \perp r,\ r \subset \beta \xrightarrow{\text{def.}} \alpha \perp \beta$ e $r \perp i$

Assim:

$i, r, s \subset \beta,\ r \parallel s,\ r \perp i \xrightarrow{\text{Geom. Plana}} s \perp i$

$\alpha \perp \beta,\ s \subset \beta$ e $s \perp i \xrightarrow{\text{T-24}} s \perp \alpha$

136. Resumo:

No perpendicularismo de plano e plano, valem as seguintes afirmações:

1ª) **T-24:** Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta de um deles é perpendicular à interseção, então essa reta é perpendicular ao outro plano.

$\alpha \perp \beta,\ r \subset \alpha,\ r \perp \alpha \cap \beta \Rightarrow r \perp \beta$

2ª) **T-25:** Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta perpendicular a um deles tem um ponto comum com o outro, então ela está contida nesse outro.

3ª) **T-26:** Por uma reta não perpendicular a um plano existe um único plano perpendicular ao primeiro plano.

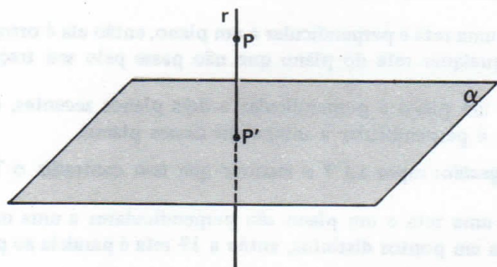
PROJEÇÃO ORTOGONAL

137. de um ponto sobre um plano:

Chama-se projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α ao traço da perpendicular ao plano α por P.

$P \in r$ e $r \perp \alpha$

$r \cap \alpha = \{P'\} \rightarrow$ P' é a projeção ortogonal de P sobre α e indica-se por $\text{proj}_{\alpha} P = P'$



138. de uma figura geométrica sobre um plano:

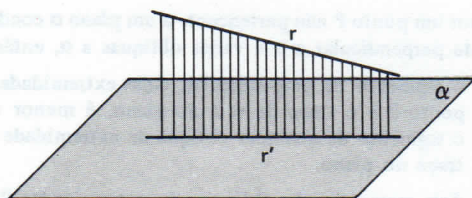
Chama-se projeção ortogonal de uma figura sobre um plano α o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre o plano α.

139. de uma reta sobre um plano:

A projeção ortogonal de uma reta não perpendicular ao plano α é uma reta.

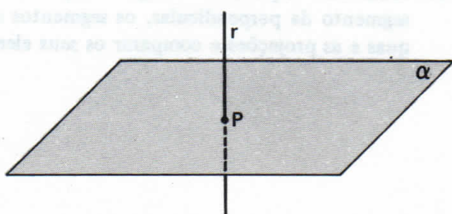
$r \not\subset \alpha$ e $r \not\perp \alpha$

$\text{Proj}_{\alpha} r = r'$



A projeção ortogonal de uma reta perpendicular ao plano α é um ponto, que é o seu traço no plano.

$r \perp \alpha$, $\text{Proj}_{\alpha} r = \{P\}$

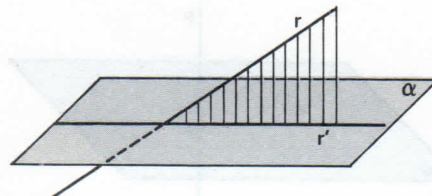


140. Inclinação de uma reta em relação a um plano.

Chama-se inclinação de uma reta r em relação a um plano α a medida do ângulo dessa reta com a sua projeção ortogonal sobre o plano.

Inclinação de r sobre α = med $\sphericalangle rr'$.

Quando $r \perp \alpha$ a inclinação de r sobre α mede 90°.

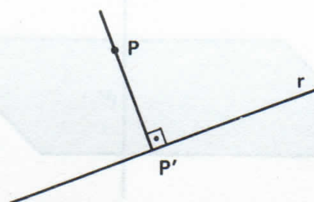


DISTÂNCIAS

141. ponto à reta:

Distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento contido na perpendicular à reta com uma extremidade no ponto e outra na reta.

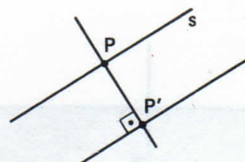
$\text{dist}(P, r) = \text{med } \overline{PP'}$



142. reta à reta:

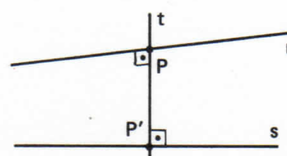
Distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto de uma e a outra reta.

$\text{dist}(s, r) = \text{dist}(P, r) = \text{med } \overline{PP'}$



Distância entre duas retas reversas é a medida do segmento contido na reta perpendicular a ambas com as extremidades em cada uma das retas reversas.

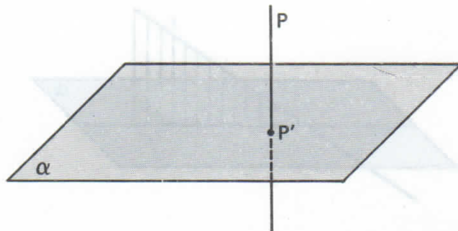
$\text{dist}(s, r) = \text{med } \overline{PP'}$ onde $\overleftrightarrow{PP'} \perp r$ e $\overleftrightarrow{PP'} \perp s$



143. ponto a plano:

Distância de um ponto a um plano é a medida do segmento contido na perpendicular ao plano por esse ponto com uma extremidade no ponto e outra no plano.

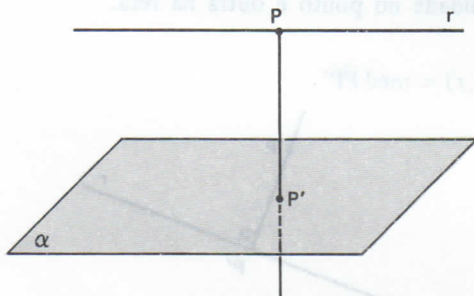
dist (P, α) = med $\overline{PP'}$



144. reta a plano paralelos:

Distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.

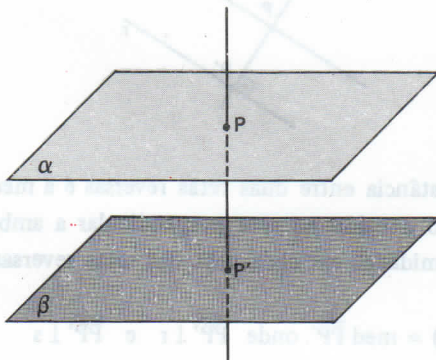
dist (r, α) = dist (P, α) = med $\overline{PP'}$



145. plano a plano paralelos:

Distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto qualquer de um plano ao outro plano.

dist (α, β) = dist (P, β) = med $\overline{PP'}$



EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

Mostre que são verdadeiras as proposições:

1) Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

2) Se uma reta r é perpendicular a um plano α e uma reta s é paralela a α e reversa a r, então r e s são ortogonais.

3) Se uma reta r é paralela a um plano α e β é um plano perpendicular a r, então β é perpendicular a α.

4) Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é ortogonal a qualquer reta do plano que não passe pelo seu traço.

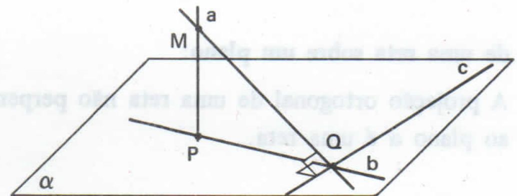
5) Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então ele é perpendicular à interseção desses planos.

Sugestão: supor $i \not\perp \gamma$ e mostrar que isso contradiz o T-26.

6) Se uma reta e um plano são perpendiculares a uma mesma reta em pontos distintos, então a 1ª reta é paralela ao plano.

Sugestão: considerar o plano formado pelas duas retas e mostrar que a interseção desse plano com o plano dado é paralela à 1ª reta.

7) Se uma reta a é perpendicular a um plano α em P e se b e c estão contidas em α e b passa por P e é perpendicular a c num ponto Q distinto de P, então toda reta r determinada por um ponto qualquer de a e pelo ponto Q é perpendicular a c.



Sugestão: considere o plano β determinado por a e b e mostre que $c \perp \beta$ observando que $c \perp b$ e $c \perp a$.

8) Se por um ponto P não pertencente a um plano α conduzimos a reta perpendicular a α e várias oblíquas a α, então:

1º) o segmento de perpendicular, cujas extremidades são o ponto P e o traço da reta no plano, é menor do que o segmento de qualquer oblíqua de extremidade P e seu traço no plano.

2º) dois segmentos de oblíquas de extremidades P e seus traços no plano, que têm projeções ortogonais congruentes, são congruentes.

3º) de dois segmentos de oblíquas de extremidades P e seus traços no plano, que têm projeções ortogonais de medidas desiguais, é maior o segmento cuja projeção ortogonal é maior.

Sugestão: considerar os pares de triângulos cujos lados são o segmento da perpendicular, os segmentos de oblíquas e as projeções e comparar os seus elementos.

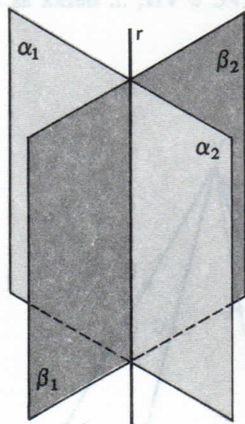
Superfícies Poliédricas Convexas
Poliedros Convexos

Neste capítulo, pretende-se que o aluno·

a) adquira noções sobre os diedros, triedros e poliedros.
b) conheça a relação de Euler.
c) conheça os poliedros de Platão e os poliedros regulares.

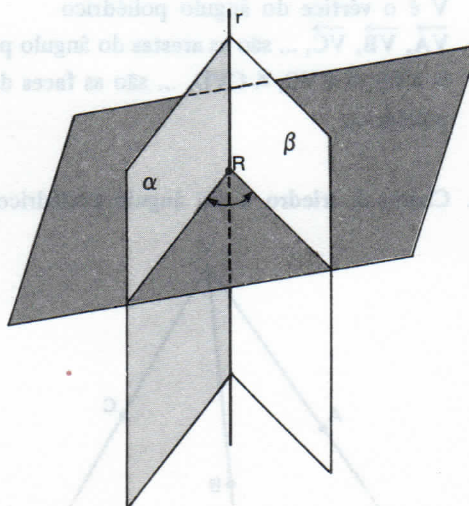
DIEDROS

146. Definição: **diedro** é cada uma das regiões do espaço determinadas por dois planos secantes, incluídos os semiplanos que limitam essa região.

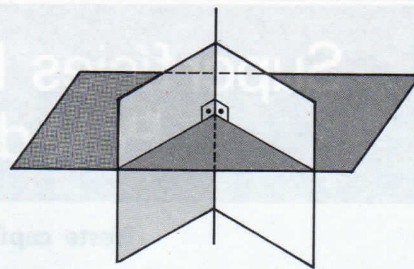


$\alpha \cap \beta = r$ determina os diedros $\alpha_2 r \beta_2$, $\beta_2 r \alpha_1$, $\alpha_1 r \beta_1$, $\beta_1 r \alpha_2$ onde em cada diedro os semiplanos são as faces e r a **aresta.**

147. Secção de um diedro: chama-se secção de um diedro ao ângulo formado pela interseção do diedro com um plano não paralelo à aresta desse diedro.



148. Chama-se **secção normal de um diedro** à secção determinada por um plano perpendicular à aresta desse diedro. Nesse caso, os lados do ângulo formado são perpendiculares à aresta do diedro.

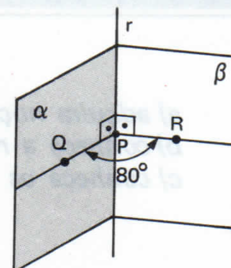


149. Medida de um diedro: é a medida de sua secção normal.

Assim:

med $(\alpha r \beta)$ = med ∢ QPR = 80°

Se med $(\alpha r \beta)$ = 90°, então $\alpha r \beta$ é um **diedro reto**.



150. Diedros congruentes: dois diedros são congruentes se e somente se têm secções normais congruentes.

ÂNGULOS POLIÉDRICOS

151. Consideremos n semi-retas $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$, ... de mesma origem V, com n ⩾ 3, colocadas numa certa ordem e obedecendo às seguintes condições:

1ª) cada um dos **n** planos determinados pelas semi-retas $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VB}$ e $\overrightarrow{VC}$, $\overrightarrow{VC}$ e $\overrightarrow{VD}$, ... deixa as restantes (n - 2) semi-retas num só dos semi-espaços por eles determinados.

2ª) as **n semi-retas** são arestas de **n diedros.**

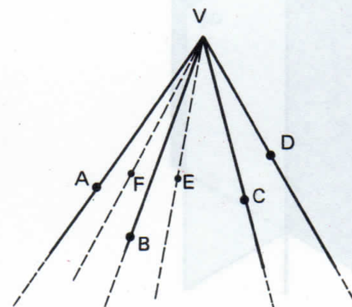
152. Chama-se **ângulo poliédrico** convexo V (A, B, C,...) ao conjunto dos pontos comuns aos n diedros assim determinados.

No ângulo poliédrico V(A, B, C, ...), temos:

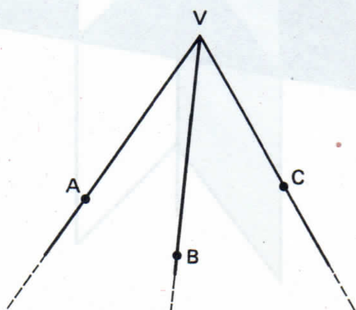
V é o **vértice** do ângulo poliédrico

$\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$, ... são as **arestas** do ângulo poliédrico

∢ AVB, ∢ BVC, ∢ CVD, ... são as **faces** do ângulo poliédrico



153. Chama-se **triedro** a um ângulo poliédrico de 3 faces e 3 arestas.



vértice: V
arestas: $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$
faces: ∢ AVB, ∢ BVC, ∢ CVA

154. Assinale as afirmações corretas:

a. ( ) Dois planos secantes determinam apenas dois diedros.
b. (X) Dois planos secantes determinam quatro diedros.
c. ( ) Todo plano que intercepta um diedro determina uma secção normal desse diedro.
d. (X) Todo plano perpendicular à aresta de um diedro determina uma secção normal desse diedro.
e. (X) Se dois diedros têm secções normais congruentes, então eles são congruentes.
f. (X) Se dois diedros são congruentes, então suas secções normais têm a mesma medida.
g. ( ) Todas as secções de um diedro são congruentes.
h. ( ) Medida de um diedro é a medida de uma secção qualquer desse diedro.
i. (X) Todas as secções normais de um diedro são congruentes.
j. (X) Medida de um diedro é a medida de uma secção normal qualquer desse diedro.
l. (X) Todo plano perpendicular às duas faces de um diedro determina uma secção normal desse diedro.
m. ( ) Três semi-retas de mesma origem sempre determinam um triedro.
n. (X) Três semi-retas de mesma origem, não coplanares, determinam um triedro.
o. ( ) Triedro é um ângulo poliédrico de 4 faces.
p. (X) Triedro é um ângulo poliédrico de 3 faces.

POLIEDROS

155. Superfície poliédrica.

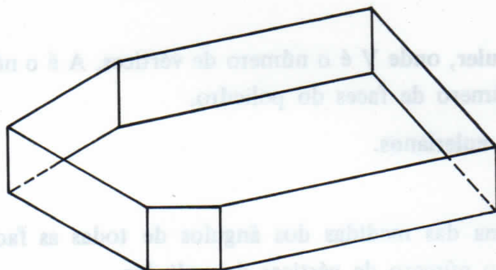
Consideremos n polígonos, obedecendo às seguintes condições:

1ª) Dois polígonos quaisquer não estão contidos num mesmo plano.

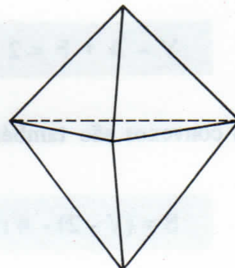
2ª) O plano de cada polígono deixa os (n – 1) polígonos restantes num único semi-espaço.

3ª) Cada lado de um polígono é lado de um ou dois polígonos e aqueles que são lados de um só polígono formam uma poligonal fechada.

A figura assim formada é chamada **superfície poliédrica**.



Superfície poliédrica aberta
quando existem lados de polígonos que são lados de um só polígono



Superfície poliédrica fechada
quando todos os lados dos polígonos são lados de dois polígonos.

156. Poliedros:

Chama-se **poliedro convexo** ao conjunto dos pontos comuns aos ângulos poliédricos determinados pelas semi-retas com origem em cada vértice e que contém as arestas de uma superfície poliédrica fechada convexa.

Assim:

Vértices do poliedro: são os vértices dos ângulos poliédricos.
Arestas do poliedro: são os lados dos polígonos.
Faces do poliedro: são os polígonos.

157. Consideremos um poliedro convexo, onde F é o número de faces, V é o número de vértices e A é o número de arestas.

Então, valem as relações:

158. 1ª Relação: $A = \frac{m \cdot F}{2} \iff F = \frac{2A}{m}$ onde cada face tem o mesmo número m de arestas (lados).

Observação:

Se as faces do poliedro têm números diferentes de arestas, por exemplo, o poliedro tem F_1 faces que são polígonos de 3 lados ($m_1 = 3$) e tem F_2 faces que são polígonos de 4 lados ($m_2 = 4$), temos:

$$A = \frac{m_1 F_1 + m_2 F_2}{2}$$

ou genericamente: $A = \frac{m_1 F_1 + m_2 F_2 + ... + m_k F_k}{2}$

159. 2ª Relação: $A = \frac{n \cdot V}{2} \iff V = \frac{2A}{n}$ onde em cada vértice concorre o mesmo número n de arestas.

Observação:

Se aos vértices do poliedro concorre um número diferente de arestas, por exemplo, o poliedro tem V_1 vértices que são vértices de ângulos poliédricos de 3 arestas ($n_1 = 3$) e tem V_2 vértices que são vértices de ângulos poliédricos de 5 arestas ($n_2 = 5$), temos:

$$A = \frac{n_1 V_1 + n_2 V_2}{2}$$

ou genericamente: $A = \frac{n_1 V_1 + n_2 V_2 + ... + n_p V_p}{2}$

160. 3ª Relação: $V - A + F = 2$ chamada **relação de Euler**, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Os poliedros convexos são também chamados de **poliedros eulerianos.**

161. 4ª Relação: $S = (V - 2) \cdot 4$ retos onde S é a soma das medidas dos ângulos de todas as faces do poliedro e V é o número de vértices do poliedro.

162. Aplicação:

1º) Calcule o número de vértices de um poliedro convexo com 12 faces e 30 arestas.

Vale a relação de Euler:

V - A + F = 2, onde A = ..30.. e F = ..12.. .

Então, V - ..30.. + ..12.. = ..2.. ⟺ V = ..20.. .

O poliedro tem ..12.. faces, ..30.. arestas e ..20.. vértices.

2º) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem 10 arestas e 6 vértices.

Vale a relação de Euler: ..V - A + F.. = 2, onde V = ..6.. e A = ..10.. .

Então, ..6 - 10 + F.. = 2 ⟺ F = ..6.. .

O poliedro tem ..6.. faces, ..10.. arestas e ..6.. vértices.

3º) Calcule o número de vértices de um poliedro que possui 12 faces triangulares.

Para calcular o número de vértices, você precisa calcular primeiro o número de arestas.

Como o poliedro tem 12 faces e cada face tem 3 lados,

vem: $A = \frac{m \cdot F}{2} \Longrightarrow A = \frac{3.12}{2} = 18$ arestas.

Pela relação de Euler, vem: $V - A + F$ = 2, onde A = 18 e F = 12.

Logo V - 18 + 12 = 2 $\Longleftrightarrow$ V = 8.

O poliedro tem 12 faces, 18 arestas e 8 vértices.

4º) Calcule o número de faces de um poliedro convexo com 10 vértices, sabendo que concorrem 3 arestas em cada vértice.

Para calcular o número de faces, você precisa calcular primeiro o número de arestas, dado por:

$A = \frac{n \cdot V}{2}$ onde n = 3 e V = 10.

Logo $A = \frac{3.10}{2} = 15$

Como V = 10, A = 15, por Euler vem:

$V - A + F = 2 \Longrightarrow 10 - 15 + F = 2 \Longrightarrow F = 7$

O poliedro tem 7 faces, 15 arestas e 10 vértices.

5º) Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem 4 faces quadrangulares e 8 faces triangulares.

O número de faces do poliedro é dado por: $F = F_1 + F_2 = 4 + 8 = 12$.

Para calcular o número de vértices, você precisa calcular primeiro o número de arestas, dado por:

$A = \frac{m_1 F_1 + m_2 F_2}{2}$ onde $m_1 = 4$, $F_1 = 4$, $m_2 = 3$ e $F_2 = 8$

$A = \frac{4.4 + 3.8}{2} = \frac{40}{2} = 20$ arestas

Como F = 12, A = 20, por Euler vem:

$V - A + F = 2 \Longrightarrow V - 20 + 12 = 2$ V = 10 vértices

O poliedro tem 12 faces, 20 arestas e 10 vértices.

6º) Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais.

O número de faces do poliedro é:

$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 3 + 1 + 1 + 2 = 7$

O número de arestas do poliedro é:

$A = \frac{m_1 F_1 + m_2 F_2 + m_3 F_3 + m_4 F_4}{2}$, onde

$m_1 = 3$ e $F_1 = 3$
$m_2 = 4$ e $F_2 = 1$
$m_3 = 5$ e $F_3 = 1$
$m_4 = 6$ e $F_4 = 2$

$A = \frac{3.3 + 4.1 + 5.1 + 6.2}{2} = \frac{30}{2} = 15$ arestas

Portanto, por Euler, o número de vértices é:

$V - A + F = 2 \Longrightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$ vértices

O poliedro tem 7 faces, 15 arestas e 10 vértices.

7º) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem 10 vértices tetraédricos (4 arestas) e 2 vértices triédricos (3 arestas).

O número de vértices do poliedro é dado por: $V = V_1 + V_2 = 10 + 2 = 12$.

O número de arestas do poliedro é dado por:

$A = \dfrac{n_1 V_1 + n_2 V_2}{2}$ onde $n_1 = 4$ e $V_1 = 10$, $n_2 = 3$ e $V_2 = 2$

$A = \dfrac{4.10 + 3.2}{2} = \dfrac{46}{2} = 23$ arestas

Portanto, por Euler, o número de faces é:

$V - A + F = 2 \Longrightarrow 12 - 23 + F = 2 \Longrightarrow F = 13$ faces

O poliedro tem 13 faces, 23 arestas e 12 vértices.

8º) Calcule o número de faces de um poliedro que tem 4 faces quadrangulares, as demais faces triangulares e o número de arestas é o dobro do número de faces triangulares.

O número de faces é:

$F = F_1 + F_2$, onde $F_1 = 4$, número de faces quadrangulares

e F_2 = número de faces triangulares.

O número de arestas A é o dobro do número de faces triangulares F_2, portanto $A = 2F_2$.

e $A = \dfrac{m_1 F_1 + m_2 F_2}{2}$ onde $m_1 = 4$ e $F_1 = 4$, $m_2 = 3$

Então, $A = \dfrac{4.4 + 3 \cdot F_2}{2} = \dfrac{16 + 3.F_2}{2}$ e substituindo A por $2F_2$,

vem: $2F_2 = \dfrac{16 + 3.F_2}{2} \Rightarrow 4F_2 = 16 + 3F_2 \Longrightarrow F_2 = 16$ faces triangulares

O poliedro tem $F_1 + F_2 = 4 + 16 = 20$ faces.

9º) Calcule o número de faces de um poliedro convexo de 21 arestas, sabendo que a soma das medidas dos ângulos das faces é 3600°.

Vamos calcular o número de vértices, aplicando a relação $S = (V - 2) \cdot 4$ retos.

Assim: $3600° = (V - 2) \cdot 360° \Longrightarrow V = 12$ vértices

Pela relação de Euler, o número de faces é:

$V - A + F = 2 \Longrightarrow 12 - 21 + F = 2 \Longrightarrow F = 11$ faces

O poliedro tem 11 faces, 21 arestas e 12 vértices.

POLIEDROS DE PLATÃO

163. Definição:

Chama-se **poliedro de Platão** a todo poliedro euleriano que:

1º) tem o mesmo número de arestas em cada face.

2º) em cada vértice concorre o mesmo número de arestas.

164. Valem as afirmações:

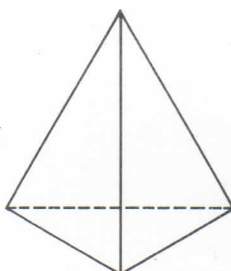
1ª) Existem apenas **5 tipos de poliedros de Platão**, ou seja, os **poliedros de Platão são somente de 5 tipos:**

FACES	arestas da face	arestas em cada vértice	V	A	F	NOME
triângulos	3	3	4	6	4	**Tetraedro**
quadriláteros	4	3	8	12	6	**Hexaedro**
triângulos	3	4	6	12	8	**Octaedro**
pentágonos	5	3	20	30	12	**Dodecaedro**
triângulos	3	5	12	30	20	**Icosaedro**

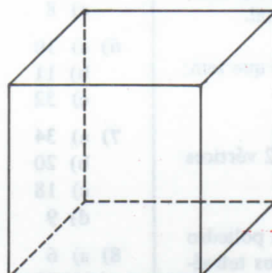
2ª) Os poliedros regulares são poliedros de Platão e são em número de 5 e apenas 5.

Chama-se poliedro regular a todo poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares e côngruos e cujos ângulos poliédricos são regulares e côngruos.

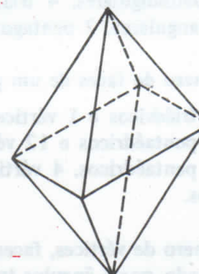
São eles:



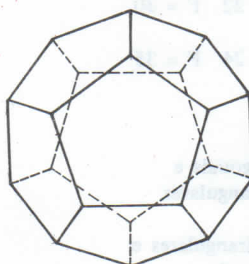
tetraedro regular



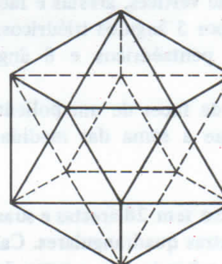
hexaedro regular (ou cubo)



octaedro regular



dodecaedro regular



icosaedro regular

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Calcule o número de vértices de um poliedro convexo com:

a) 12 arestas e 5 faces.
b) 15 arestas e 10 faces.
c) 30 arestas e 12 faces.

2) Calcule o número de faces de um poliedro convexo com:

a) 8 vértices e 15 arestas.
b) 10 vértices e 25 arestas.
c) 13 vértices e 19 arestas.

3) Calcule o número de arestas de um poliedro convexo com:

a) 15 vértices e 12 faces.
b) 10 vértices e 8 faces.
c) 13 vértices e 20 faces.

4) Calcule o número de vértices de um poliedro que tem:

a) 15 faces quadrangulares.
b) 12 faces triangulares.
c) 20 faces pentagonais.

5) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem:

a) 20 vértices triédricos.
b) 12 vértices pentaédricos.
c) 6 vértices tetraédricos.

6) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem:

a) 8 vértices, sabendo que concorrem 4 arestas em cada vértice.
b) 18 vértices, sabendo que concorrem 3 arestas em cada vértice.
c) 20 vértices, sabendo que concorrem 5 arestas em cada vértice.

7) Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem:

a) 8 faces pentagonais e 10 faces hexagonais.
b) 12 faces triangulares e 8 faces pentagonais.
c) 5 faces quadrangulares, 4 triangulares e 6 pentagonais.
d) 4 faces triangulares, 2 pentagonais e 1 hexagonal.

8) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem:

a) 6 vértices triédricos e 1 vértice tetraédrico.
b) 8 vértices pentaédricos e 12 vértices triédricos.
c) 6 vértices pentaédricos, 4 vértices triédricos e 2 vértices tetraédricos.

9) Calcule o número de vértices, faces e arestas de um poliedro convexo formado por 4 ângulos triédricos, 5 ângulos tetraédricos, 10 ângulos pentaédricos e 3 ângulos hexaédricos.

10) Calcule o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por 5 ângulos triédricos, 4 ângulos tetraédricos, 7 ângulos pentaédricos e 8 ângulos hexaédricos.

11) Calcule o número de faces de um poliedro convexo de 18 arestas, sabendo que a soma das medidas dos ângulos das faces é 4 680°

12) Um poliedro convexo tem 28 arestas e suas faces são algumas pentagonais e as outras quadrangulares. Calcule o número de faces de cada tipo, sabendo que a soma dos ângulos da face é 64 retos.

13) Um poliedro convexo tem 15 faces, algumas triangulares e as outras quadrangulares. Calcule o número de faces de cada tipo, sabendo que o poliedro tem 12 vértices.

14) Um poliedro convexo tem 40 arestas e é formado por faces triangulares e faces pentagonais. Calcule o número de faces de cada tipo, sabendo que o número de faces triangulares é igual ao número de faces pentagonais.

15) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem 12 faces triangulares e as demais pentagonais e o número de arestas é o triplo do número de faces pentagonais.

RESPOSTAS

1) a) 9
b) 7
c) 20

2) a) 9
b) 17
c) 8

3) a) 25
b) 16
c) 31

4) a) 17
b) 8
c) 32

5) a) 12
b) 20
c) 8

6) a) 10
b) 11
c) 32

7) a) 34
b) 20
c) 18
d) 9

8) a) 6
b) 20
c) 15

9) A = 50 V = 22 F = 30

10) A = 57 V = 24 F = 35

11) 5

12) 8 faces pentagonais e
4 faces quadrangulares

13) 5 faces quadrangulares e
10 faces triangulares

14) 10 faces pentagonais e
10 faces triangulares

15) 48

Prismas e Pirâmides



a) conheça alguns tipos particulares de sólidos.
b) conheça as propriedades desses sólidos.
c) saiba calcular áreas das superfícies dos sólidos e o volume dos mesmos.

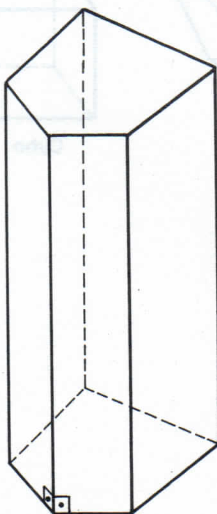
PRISMAS

165. Definição: prisma é um poliedro convexo no qual duas faces, chamadas **bases**, são polígonos congruentes e estão em planos paralelos e as demais faces, chamadas **faces laterais**, são paralelogramos.

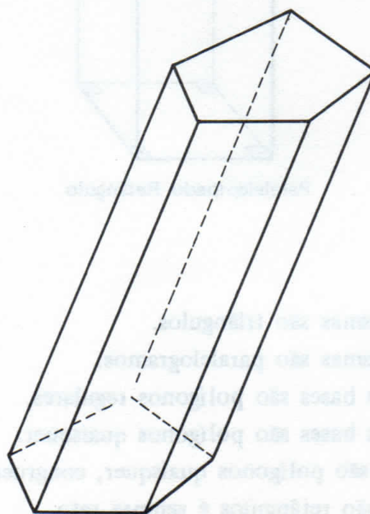
166. Prisma reto é o prisma cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

167. Prisma oblíquo é o prisma cujas arestas laterais não são perpendiculares aos planos das bases.

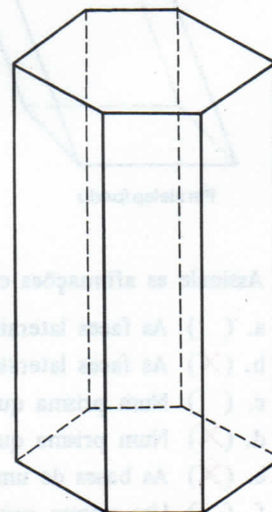
168. Prisma regular é todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



prisma reto

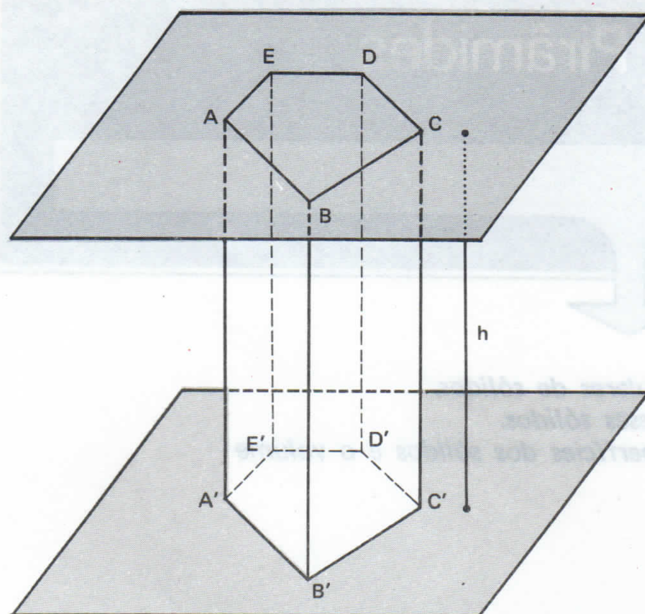


prisma oblíquo



prisma regular

169. Elementos de um prisma:



1 – **Bases:** polígonos ABCDE e A'B'C'D'E'.
Todo prisma tem duas bases que são paralelas e congruentes.

2 – **Faces laterais:** AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D etc.
As faces são paralelogramos e o número de faces laterais é igual ao número de lados dos polígonos das bases.

3 – **Arestas laterais:** AA', BB', CC' etc.
O número de arestas laterais é igual ao número de vértices do polígono da base.

4 – **Arestas das bases:** AB, BC, CD, DE, EA, A'B', B'C', ... são os lados dos polígonos das bases.

5 – **Altura h:** é a distância entre os planos das bases. Quando o prisma é reto a altura é a medida da própria aresta lateral.

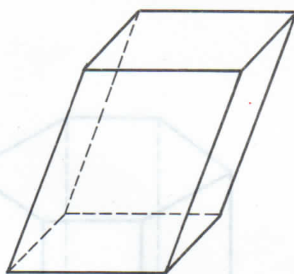
170. Tipos de prismas:

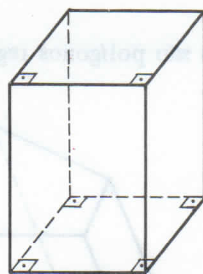
1 – **Paralelepípedo** é um prisma cujas bases são paralelogramos.

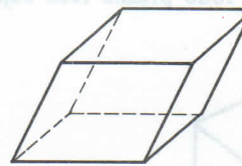
2 – **Paralelepípedo retângulo** ou **reto-retângulo** ou **ortoedro** é um prisma reto, cujas bases são retângulos e portanto suas faces laterais também são retângulos.

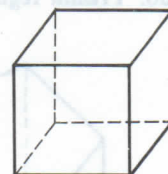
3 – **Romboedro** é um paralelepípedo cujas faces são losangos, isto é, tem 12 arestas congruentes.

4 – **Romboedro retângulo** ou **cubo** é um paralelepípedo retângulo cujas bases são quadradas e cujas faces laterais são quadrados.


Paralelepípedo


Paralelepípedo Retângulo


Romboedro


Cubo

171. Assinale as afirmações corretas:

a. ( ) As faces laterais dos prismas são triângulos.
b. (X) As faces laterais dos prismas são paralelogramos.
c. ( ) Num prisma qualquer as bases são polígonos regulares.
d. (X) Num prisma qualquer as bases são polígonos quaisquer.
e. (X) As bases de um prisma são polígonos quaisquer, congruentes e paralelas.
f. ( ) Um prisma cujas bases são retângulos é sempre reto.
g. (X) Num prisma triangular as bases são triângulos.

h. (X) Um prisma cujas bases são paralelogramos é um paralelepípedo.
i. (X) Um paralelepípedo tem 6 faces que são paralelogramos.
j. (X) Um paralelepípedo retângulo tem 6 faces que são retângulos.
l. ( ) Um paralelepípedo retângulo pode ser oblíquo.
m. ( ) Romboedro é um prisma de base triangular.
n. (X) Romboedro tem 6 faces que são losangos e portanto todas as suas arestas são congruentes entre si.
o. (X) Romboedro é um prisma cujas bases e faces laterais são paralelogramos de lados congruentes entre si.
p. ( ) Um cubo é um paralelepípedo retângulo onde apenas as bases são quadrados.
q. (X) Cubo é um paralelepípedo retângulo que tem 6 faces que são quadrados.
r. (X) Num cubo as 12 arestas são congruentes entre si.

ÁREA E VOLUME DE UM PRISMA

Para resolver problemas sobre prismas e pirâmides cujas bases são polígonos regulares, iremos recordar as fórmulas do lado e apótema desses polígonos regulares inscritos, em função do raio.

172. Assim:

POLÍGONO	LADO	APÓTEMA	ÁREA
quadrado	$\ell_4 = r\sqrt{2}$	$a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\ell_4}{2}$	$S = \ell_4^2 = 2r^2$
triângulo	$\ell_3 = r\sqrt{3}$	$a_3 = \dfrac{r}{2} = \dfrac{\ell_3\sqrt{3}}{6}$	$S = \dfrac{\ell_3^2\sqrt{3}}{4}$
hexágono	$\ell_6 = r$	$a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$	$S = \dfrac{3\ell_6^2\sqrt{3}}{2}$
pentágono	$\ell_5 = \dfrac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$a_5 = \dfrac{r(\sqrt{5}+1)}{4}$	$S = p \cdot a$
decágono	$\ell_{10} = \dfrac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$	$a_{10} = \dfrac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$S = p \cdot a$
$a_n = \dfrac{\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}}{2}$ e $\ell_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - \ell_n^2}}$			

173. Seja um **prisma oblíquo qualquer** de aresta **a**, altura **h** e $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$ as medidas dos lados de uma secção reta ABC ...

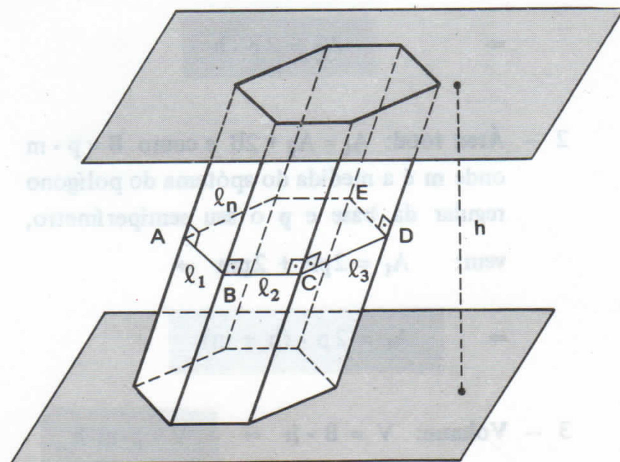
1 — **Área lateral:** é a soma das áreas das faces laterais.

Como cada face lateral é um paralelogramo de base **a** e altura $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n$, vem:

$$A_\ell = a\ell_1 + a\ell_2 + ... + a\ell_n = a\underbrace{(\ell_1 + \ell_2 + ... + \ell_n)}_{2p}$$

$$A_\ell = 2p \cdot a$$

onde $2p$ é o perímetro da secção normal.



2 – **Área total:** é a soma da área lateral com o dobro da área da base.

$$A_t = 2p \cdot a + 2B$$

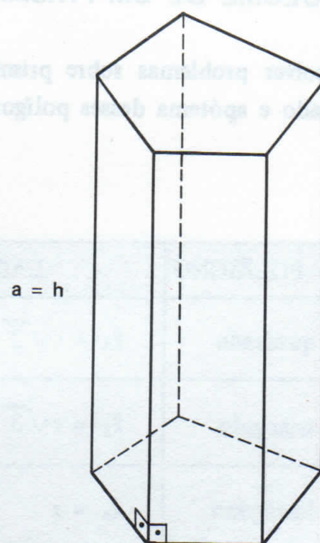
onde B é a área da base.

3 – **Volume:** é o produto da área da base pela altura do prisma.

$$V = B \cdot h$$

174. Seja um **prisma reto** de aresta a:

No prisma reto a altura é a medida da aresta lateral e a base é secção reta.



1 – **Área lateral:** $A_\ell = 2p \cdot a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A_\ell = 2p \cdot h$$

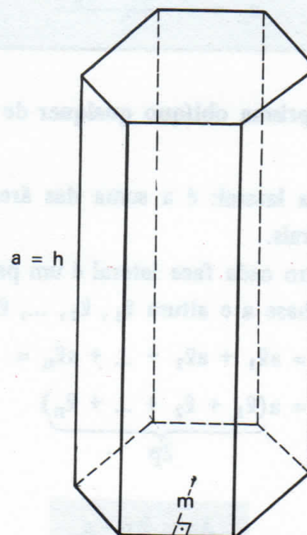
2 – **Área total:** $A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A_t = 2ph + 2B$$

3 – **Volume:** $V = B \cdot h$

175. Seja um **prisma regular** de aresta a:

O prisma regular é reto e suas bases são polígonos regulares.



1 – **Área lateral:** $A_\ell = 2p \cdot a \Rightarrow$

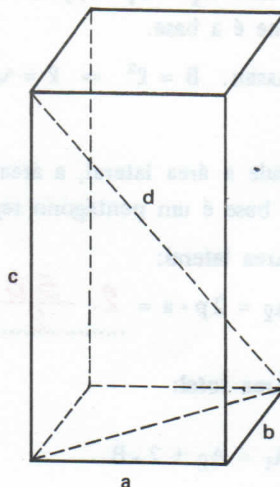
$$\Rightarrow \quad A_\ell = 2p \cdot h$$

2 – **Área total:** $A_t = A_\ell + 2B$ e como $B = p \cdot m$ onde **m** é a medida do apótema do polígono regular da base e **p** o seu semiperímetro, vem: $A_t = 2ph + 2pm \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad A_t = 2p \cdot (h + m)$$

3 – **Volume:** $V = B \cdot h \Rightarrow$ $V = p \cdot m \cdot h$

176. Seja um **paralelepípedo retângulo** de dimensões **a, b** e **c**:



1 – **Diagonal:** a medida da diagonal do paralelepípedo é dada por:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

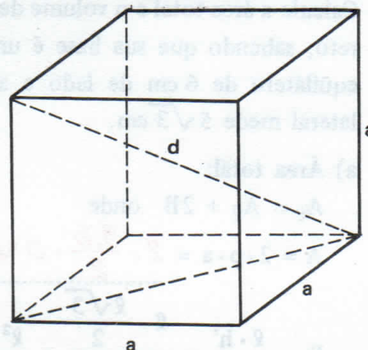
2 – **Área lateral:** $A_\ell = 2(ac + bc)$

3 – **Área total:** $A_t = 2(ab + ac + bc)$

4 – **Volume:** $V = a \cdot b \cdot c$

177. Seja um **cubo** de aresta a:

Neste caso temos um paralelepípedo retângulo onde todas as dimensões são iguais a a.



1 – **Diagonal:** $d = \sqrt{3a^2} \Rightarrow$ $d = a\sqrt{3}$

2 – **Área lateral:** $A_\ell = 2(a^2 + a^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $A_\ell = 4a^2$

3 – **Área total:** $A_t = 2(a^2 + a^2 + a^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $A_t = 6a^2$

4 – **Volume:** $V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow$ $V = a^3$

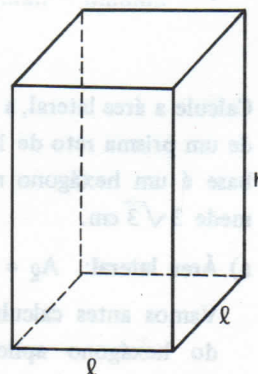
178. Aplicação:

1º) Calcule o volume de um prisma reto, sabendo que a área da base é 20 cm² e sua aresta lateral mede 12 cm.

$V = B \cdot h$, onde $B =$ 20 cm² e $h =$ 12 cm

Então $V =$ 20 . 12 = 240 cm³

2º) Calcule a altura e a área lateral de um prisma reto cujo volume é 960 cm³ e a base é um quadrado de área 64 cm².



a) **Cálculo da altura:**

$V = B \cdot h$, onde $V =$ 960 cm³ e

$B =$ 64 cm²

960 = 64 $\cdot h \Rightarrow h = \frac{960}{64} = 15$ cm

b) **Cálculo da área lateral:**

Como $A_\ell = 2p \cdot h$, precisamos, para calcular o perímetro $2p$, saber quanto mede o lado do quadrado que é a base.

Assim: $B = \ell^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{B} = \sqrt{64} = 8$ cm $\quad A_\ell = 2 \cdot \frac{4.8}{2} \cdot 15 = 480$ cm²

3º) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto cuja aresta lateral mede 11, 2 cm e cuja base é um pentágono regular de 6 cm de lado e 4 cm de apótema.

a) **Área lateral:**

$A_\ell = 2p \cdot a = 2 \cdot \frac{5.6}{2} \cdot 11,2 = 336$ cm²

b) **Área total:**

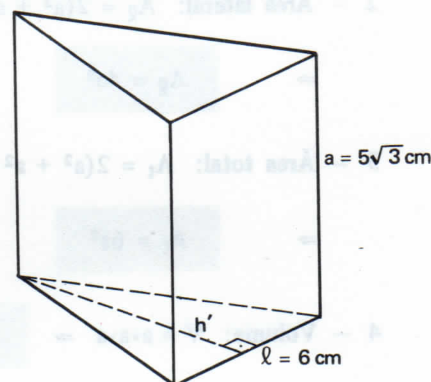
$A_t = A_\ell + 2 \cdot B$ onde $\begin{cases} A_\ell = 336 \text{ cm}^2 \\ B = p \cdot m = \frac{5.6}{2} \cdot 4 = 60 \text{ cm}^2 \end{cases}$

$A_t = 336 + 2.60 = 456$ cm²

c) **Volume:**

$V = B \cdot h = 60 . 11,2 = 672$ cm³

4º) Calcule a área total e o volume de um prisma reto, sabendo que sua base é um triângulo eqüilátero de 6 cm de lado e a sua aresta lateral mede $5\sqrt{3}$ cm.



a) **Área total:**

$A_t = A_\ell + 2B$ onde

$A = 2 \cdot p \cdot a = 2 \cdot \frac{3.6}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$ cm²

$B = \frac{\ell \cdot h'}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} =$

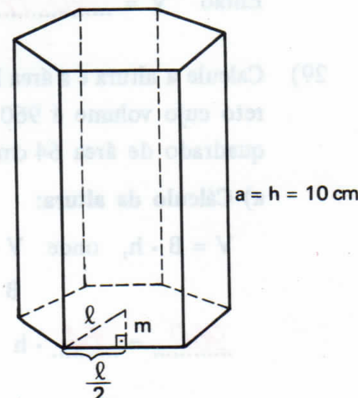
$= \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm²

$A_t = 90\sqrt{3} + 2.9\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ cm³

b) **Volume:**

$V = B.h = 9\sqrt{3} . 5\sqrt{3} = 135$ cm³

5º) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto de 10 cm de altura e cuja base é um hexágono regular cujo apótema mede $3\sqrt{3}$ cm.



a) **Área lateral:** $A_\ell = 2 \cdot p \cdot h$

Vamos antes calcular a medida do lado do hexágono aplicando a relação de Pitágoras:

$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m^2 \iff \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = m^2 \Rightarrow \frac{3\ell^2}{4} = m^2 \Longrightarrow \ell^2 = \frac{4m^2}{3} \Rightarrow \ell =$

$= \frac{2m}{\sqrt{3}} = \frac{2.3\sqrt{3}}{3} = 6\ cm$

Então:

$A_\ell = 2p.a = 2\,\frac{6.6}{2}.10 = 360\ cm^2$

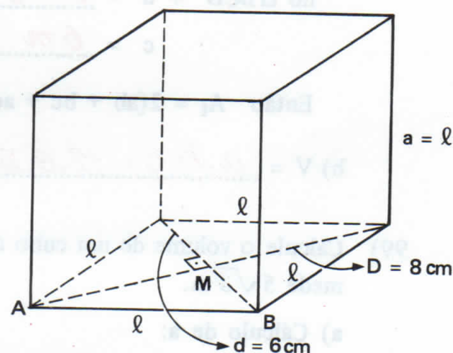
b) **Área total:** $A_t = 2p(h + m)$

$A_t = 2.\frac{6.6}{2}(10 + 3\sqrt{3}) = 36(10 + 3\sqrt{3})\ cm^2$

c) **Volume:** $V = B \cdot a$ onde $\begin{cases} B = p \cdot m = \frac{6.6}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}\ cm^2 \\ a = 10\ cm \end{cases}$

$V = 54\sqrt{3}.10 = 540\sqrt{3}\ cm^3$

6º) Calcule o volume de um prisma reto, sabendo que a aresta lateral e a aresta da base têm medidas iguais e que a base é um losango cujas diagonais medem 6 cm e 8 cm.



Como $V = B \cdot a$, precisamos calcular a área da base e calcular a medida de a:

a) Cálculo de $a = \ell$:

Aplicando Pitágoras no Δ ABM vem:

$\ell^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 9 + 16 = 25 \Longrightarrow \ell = 5\ cm$

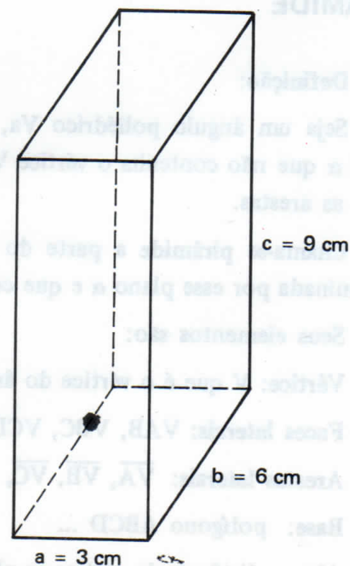
b) Cálculo de **B**:

$B = \frac{d.D}{2} = \frac{6.8}{2} = 24\ cm^2$

Então:

$V = 24.5 = 120\ cm^3$

7º) Calcule a diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 3 cm, 6 cm e 9 cm.



a) **Diagonal:**

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{9 + 36 + 81} =$

$= \sqrt{126} = 3\sqrt{14}\ cm$

b) **Área total:**

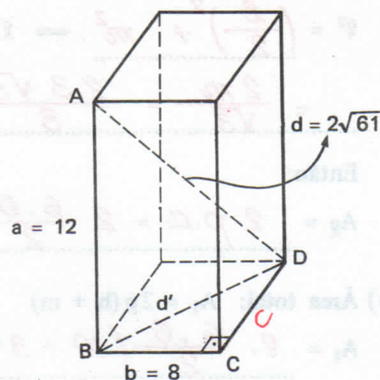
$A_t = 2(ab + ac + bc) = 2.(3.6 + 3.9 + 6.9) =$

$= 2.99 = 198\ cm^2$

c) **Volume:**

$V = a \cdot b \cdot c = 3.6.9 = 162\ cm^3$

89) Calcule a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede $2\sqrt{61}$ m, a aresta lateral mede 12 m e uma das arestas da base mede 8 m.



a) $A_t = 2(ab + bc + ac)$

Para calcular a área total, devemos ter a outra aresta da base. Portanto, devemos calcular as medidas dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ aplicando a relação de Pitágoras nos Δ ABD e Δ BCD.

Assim:

no Δ ABD $\rightarrow d^2 = a^2 + d'^2 \Longrightarrow (2\sqrt{61})^2 = (12)^2 + d'^2 \Longrightarrow d'^2 = 244 - 144 = 100$

$d' = \sqrt{100} = 10$ m

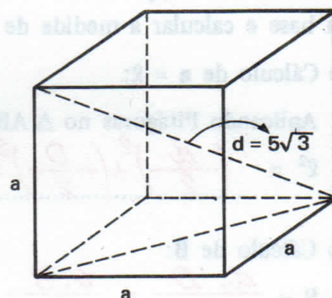
no Δ BCD $\rightarrow d'^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 10^2 = 8^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = 100 - 64 \Longrightarrow c = 6$ m

$c = 6$ m

Então $A_t = 2(ab + bc + ac) = 2(12.8 + 8.6 + 12.6) = 432$ m²

b) $V = a.b.c = 12.8.6 = 576$ m³

99) Calcule o volume de um cubo cuja diagonal mede $5\sqrt{3}$ m.



a) Cálculo de a:

$d = a\sqrt{3} \Longleftrightarrow 5\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 5$ m

b) Volume:

$V = a^3 = 5^3 = 125$ m³

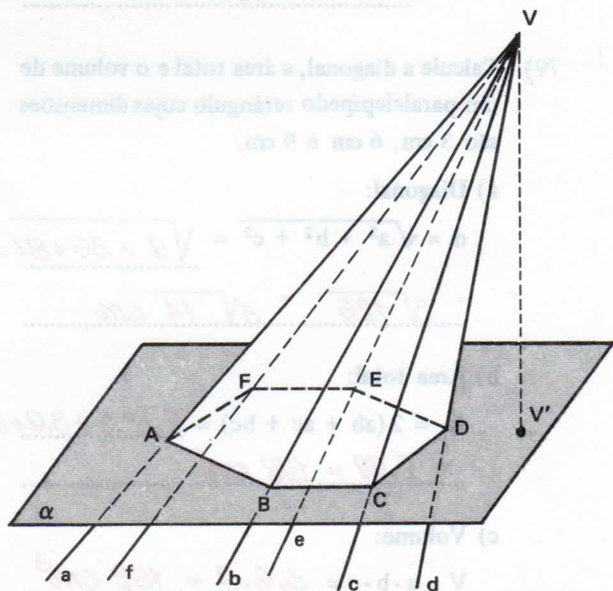
Exercícios a resolver: itens 1 a 11, pág. 196.

PIRÂMIDE

179. Definição:

Seja um ângulo poliédrico Va, b, c, d, ... e um plano α que não contenha o vértice V e que intercepte todas as arestas.

Chama-se **pirâmide** a parte do ângulo poliédrico determinada por esse plano α e que contém o vértice V.



Seus elementos são:

Vértice: V que é o vértice do ângulo poliédrico.

Faces laterais: VAB, VBC, VCD, ...

Arestas laterais: $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, ...

Base: polígono ABCD ...

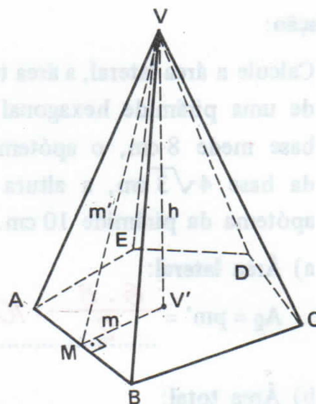
Altura: distância do vértice ao plano da base ($\overline{VV'}$).

180. As pirâmides podem ser classificadas, de acordo com o polígono da base, em triangulares (chamadas tetraedros), quadrangulares, pentagonais etc.

181. Pirâmide regular: uma pirâmide é regular quando a sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

Observações:

1º) Chama-se **apótema** de uma pirâmide regular o segmento que tem por extremidades o vértice da pirâmide e o ponto médio de um dos lados do polígono da base. Assim, na figura, $\overline{VM}$ é o apótema da pirâmide, isto é, é a altura do triângulo da face.



2º) Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes entre si e portanto as faces laterais são triângulos congruentes entre si.

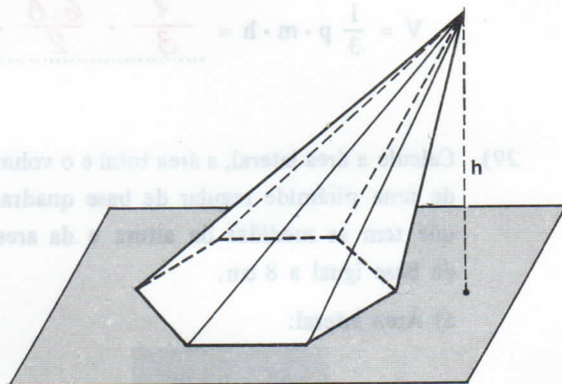
ÁREAS E VOLUMES DE UMA PIRÂMIDE

182. Pirâmide qualquer:

1 — **Área lateral:** é a soma das áreas das faces laterais.

2 — **Área total:** é a soma da área lateral com a área da base.

$$A_t = A_\ell + B$$

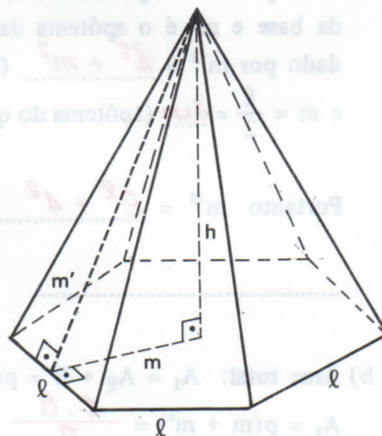


3 — **Volume:** é a terça parte do produto da área da base pela altura.

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

183. Pirâmide regular:

1 — **Área lateral:** $A = p \cdot m'$, onde **p** é o semiperímetro do polígono da base e **m'** é a medida do apótema da pirâmide.



2 — **Área total:** $A_t = A_\ell + B = pm' + pm \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $$A_t = p(m + m')$$

onde **m** é a medida do apótema do polígono da base.

3 — **Volume:** $V = \frac{1}{3} B \cdot h \iff$ $V = \frac{1}{3} p \cdot m \cdot h$, onde **h** é a altura da pirâmide.

4 — **Observação:** numa pirâmide regular vale a relação $m'^2 = h^2 + m^2$

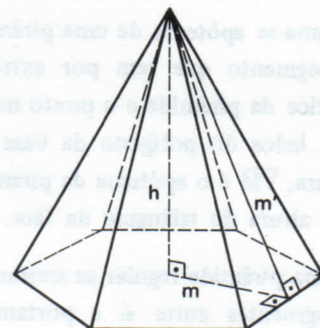
184. Tronco de pirâmide:

Seja uma pirâmide e um plano β que não contém o seu vértice e que encontra todas as arestas laterais. Chama-se **tronco de pirâmide** à parte da pirâmide que não contém o vértice.

Se o plano β for paralelo ao plano do polígono da base, então as faces laterais do tronco de pirâmide serão trapézios.

185. Aplicação:

1º) Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide hexagonal cuja aresta da base mede 8 cm, o apótema do polígono da base $4\sqrt{3}$ cm, a altura $2\sqrt{3}$ cm e o apótema da pirâmide 10 cm.



a) **Área lateral:**

$A_\ell = pm' = \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 10 = 240\ cm^2$

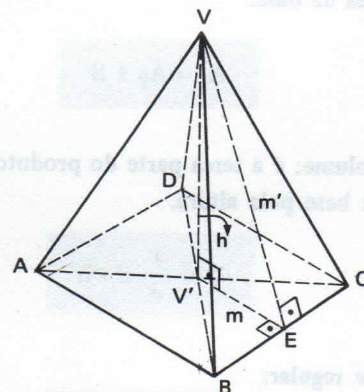
b) **Área total:**

$A_t = p(m + m') = \frac{6 \cdot 8}{2}(4\sqrt{3} + 10) = 24(4\sqrt{3} + 10) = 48(2\sqrt{3} + 5)\ cm^2$

c) **Volume:**

$V = \frac{1}{3}\ p \cdot m \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 10 = 320\sqrt{3}\ cm^3$

2º) Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide regular de base quadrada que tem as medidas da altura e da aresta da base igual a 8 cm.



a) **Área lateral:**

$A_\ell = p \cdot m'$

onde p é o semiperímetro do polígono da base e m' é o apótema da pirâmide dado por $m'^2 = h^2 + m^2$ (Pitágoras) e $m = \frac{\ell}{2} = 4\,cm$ (apótema do quadrado).

Portanto $m'^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \Rightarrow m' = 4\sqrt{5}\,cm$ e $A_\ell = \frac{4 \cdot 8}{2} \cdot 4\sqrt{5} = 64\sqrt{5}\ cm^2$

b) **Área total:** $A_t = A_\ell + B = p(m + m')$

$A_t = p(m + m') = \frac{4 \cdot 8}{2}(4 + 4\sqrt{5}) = 64(1 + \sqrt{5})\ cm^2$

c) **Volume:** $V = \frac{1}{3}\ B \cdot h = \frac{1}{3}\ p \cdot m \cdot h$

$V = \frac{1}{3}\ p \cdot m \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 8}{2} \cdot 4 \cdot 8 = \frac{512}{3}\ cm^3$

3º) Numa pirâmide regular de base hexagonal a área total é igual a $30\sqrt{3}$ cm² e a área lateral é o quádruplo da área da base. Calcule a medida do lado do hexágono.

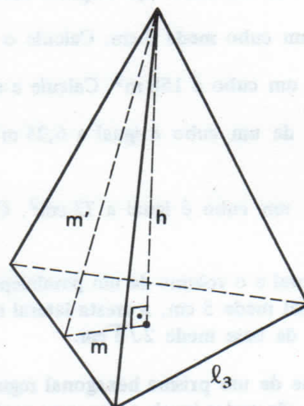
$$\left.\begin{array}{l} A_t = A_\ell + B \\ A_t = 30\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \\ A_\ell = 4 \cdot B \end{array}\right\} \Rightarrow 30\sqrt{3} = 4 . B + B \Rightarrow B = \frac{30\sqrt{3}}{5} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Como a base é o hexágono regular e sua área é dada por $B = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ e o raio R da circunferência circunscrita é o próprio lado do hexágono, vem:

$$6\sqrt{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 12\sqrt{3} = 3R^2\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2\ \text{cm}$$

Portanto, $R = \ell_6 = 2$ cm.

4º) Calcule a área total e o volume de uma pirâmide regular cuja base é um triângulo eqüilátero de lado $12\sqrt{3}$ cm, sabendo que a área total é igual a $\frac{5}{3}$ da área lateral.



$A_t = p(m + m')$, então, para calcularmos a área total precisamos calcular o semiperímetro e as medidas dos apótemas da base e da pirâmide.

Cálculo dos apótemas:

O apótema da base é dado por

$$m = \frac{\ell_3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{12\sqrt{3} . \sqrt{3}}{6}$$

e portanto $m = 6$ cm

O apótema da pirâmide é calculado pelas condições do problema:

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = p \cdot m' \\ A_t = p(m + m') \\ A_t = \frac{5}{3} A_\ell \end{array}\right\} \Rightarrow p(m + m') = \frac{5}{3}\ p . m' \Rightarrow m + m' = \frac{5}{3} m'$$

Então: $6 + m' = \frac{5}{3} m' \Rightarrow \left(\frac{5}{3} - 1\right) m' = 6 \Rightarrow m' = 9$ cm

Portanto:

a) $A_t = p(m + m') = 3 . \frac{12\sqrt{3}}{2} . (6 + 9) = 270\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

b) $V = \frac{1}{3} B \cdot h$, onde a área da base é dada por $B = \frac{\ell_3^2\sqrt{3}}{4}$ e a altura dada por Pitágoras

$$m'^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = m'^2 - m^2$$

$$h = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} \Longrightarrow h = 3\sqrt{5}\ \text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(12\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} . 3\sqrt{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{144 . 3\sqrt{3}}{4} . 3\sqrt{5} = 108\sqrt{15}\ \text{cm}^3$$

Exercícios a resolver: itens 12 a 20, pág. 196.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto cuja aresta lateral mede 2,8 m e cuja base é um paralelogramo de lados 5 m e 3 m.

2) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto, sabendo que sua aresta lateral mede 13,5 cm e que sua base é um octógono regular de 5 cm de lado e 2,4 cm de apótema.

3) O volume de um prisma reto é 1 800 cm^3 e a área de sua base é 120 cm^2. Calcule a medida de sua aresta lateral.

4) Calcule o volume de um cubo cuja diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm.

5) A diagonal de um cubo mede 3 cm. Calcule o seu volume.

6) A área total de um cubo é 150 m^2. Calcule a sua diagonal.

7) A área da base de um cubo é igual a 6,25 m^2. Calcule o seu volume.

8) A área total de um cubo é igual a 72 cm^2. Calcule a sua diagonal.

9) Calcule a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede 5 cm, a aresta lateral mede 3 cm e uma das arestas da base mede $2\sqrt{3}$ cm.

10) Calcule o volume de um prisma hexagonal regular, sabendo que suas arestas são todas iguais e que suas medidas somam 90 cm.

11) Calcule as dimensões de um ortoedro (paralelepípedo retângulo), sabendo que a área da base é 6 cm^2, o volume 30 cm^3 e a área total 62 cm^2.

12) Calcule a área lateral, a área total e volume de uma pirâmide pentagonal cuja aresta da base mede 6 cm, o apótema do polígono da base 3 cm, a altura da pirâmide 10 cm e o apótema da pirâmide 4 cm.

13) Calcule o volume de uma pirâmide de 12 cm de altura, sabendo que sua base é um quadrado de 10 cm de perímetro.

14) Calcule o volume de uma pirâmide de $2\sqrt{3}$ cm de altura, cuja base é um triângulo eqüilátero de 15 cm de perímetro.

15) Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide regular de base hexagonal, sabendo que a aresta da base mede 10 cm e a altura da pirâmide é igual a 5 cm.

16) O volume de uma pirâmide é igual a 30 cm^3 e sua altura é 15 cm. Calcule a medida da aresta da base, sabendo que essa base é um losango onde uma das diagonais é o triplo da outra.

17) Calcule a área lateral e o volume de uma pirâmide regular cuja base é um quadrado de $6\sqrt{2}$ cm de lado e cujas arestas laterais têm a mesma medida das diagonais da base.

18) Calcule o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede $3\sqrt{2}$ cm.

19) Calcule o volume de um tetraedro regular cuja área da base é $6\sqrt{3}$ cm^2.

20) Calcule a área total e o volume de uma pirâmide cuja base é um triângulo eqüilátero de 18 cm de perímetro e cuja área total é igual a $\frac{3}{2}$ da área lateral.

RESPOSTAS

1) $A_\ell = 44{,}8\ m^2$, $A_t = 74{,}8\ m^2$, $V = 42\ m^3$
2) $A_\ell = 540\ cm^2$, $A_t = 636\ cm^2$, $V = 648\ cm^3$
3) 15 cm
4) 125 m^3
5) $3\sqrt{3}\ cm^3$
6) $5\sqrt{3}$ cm
7) 15,625 cm^3
8) 6 cm
9) $A_t = 12 + 20\sqrt{3}\ cm^2$, $V = 12\sqrt{3}\ cm^3$
10) $\frac{375\sqrt{3}}{2}\ cm^3$
11) 2 cm, 3 cm e 5 cm
12) $A_\ell = 60\ cm^2$, $A_t = 105\ cm^2$, $V = 150\ cm^3$
13) $V = 25\ cm^3$
14) $V = 12{,}5\ cm^3$
15) $A_\ell = 300\ cm^2$, $A_t = 150(\sqrt{3} + 2)\ cm^2$, $V = 250\sqrt{3}\ cm^3$
16) $\sqrt{10}$ cm
17) $A = 72\sqrt{7}\ cm^2$, $V = 144\sqrt{3}\ cm^3$
18) 9 cm^3
19) $8\sqrt{3}\ cm^3$
20) $A_t = 27\sqrt{3}\ cm^2$, $V = 9\sqrt{3}\ cm^3$

SEQÜÊNCIA B

1) Calcule o volume de um prisma de 3 cm de altura e cuja base é um quadrado inscrito numa circunferência de 5 cm de raio.

$V = 150\ cm^3$

2) Calcule o volume e a área lateral de um prisma reto de 10 cm de altura cuja base é um hexágono regular de apótema $3\sqrt{3}$ cm.

$V = 540\sqrt{3}\ cm^3$, $A_\ell = 360\ cm^2$

3) A diagonal de um paralelepípedo retângulo mede $\sqrt{14}$ m. Calcule o seu volume, sabendo que suas dimensões são números inteiros consecutivos.

$V = 6\ cm^3$

4) A área total de um cubo é igual a 150 cm^2. Quanto se deve acrescentar à sua aresta para que sua área total se torne igual a 384 cm^2?

3 cm

5) A superfície total de um paralelepípedo retângulo é 142 cm^2 e a soma das medidas das arestas é 60 cm. Calcule suas dimensões, sabendo que estão em P.A.

3 cm, 5 cm, 7 cm

6) Calcule a área total e o volume de um prisma triangular regular, sabendo que o perímetro da base é 18 m e sua aresta lateral é igual a $\frac{2}{3}$ da aresta da base.

$A_t = 18(4+\sqrt{3})\ cm^2$, $V = 36\sqrt{3}\ cm^3$

7) Calcule a altura de um prisma, sabendo que sua base é um hexágono inscrito num círculo de 3 cm de raio e que o prisma tem o mesmo volume de um cubo cuja face está inscrita nesse mesmo círculo.

$\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm

8) Calcule a área total e o volume de um prisma triangular regular cuja base tem 2 cm de apótema e cuja altura é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita à base.

$A_t = 120\sqrt{3}\ cm^2$, $V = 96\sqrt{3}\ cm^3$

9) Calcule o volume de uma pirâmide, sabendo que sua base é um hexágono inscrito num círculo de raio igual a 2 cm e a sua altura é igual à medida do lado de um triângulo eqüilátero inscrito no mesmo círculo.

$V = 12\ cm^3$

10) Numa pirâmide regular de base quadrada, a área total é igual a 72 cm^2 e a área lateral é o triplo da área da base. Calcule a medida da diagonal do quadrado da base.

6 cm

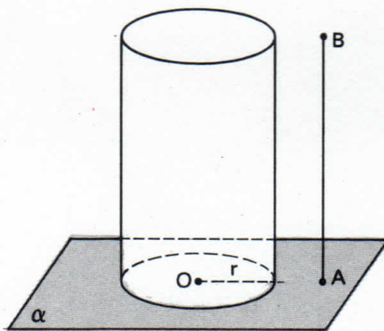
Cilindro, Cone e Esfera

Neste capítulo, pretende-se que o aluno:

a) conheça alguns corpos redondos.
b) conheça as propriedades desses corpos.
c) saiba calcular áreas e volumes do cilindro, cone e esfera.

CILINDRO

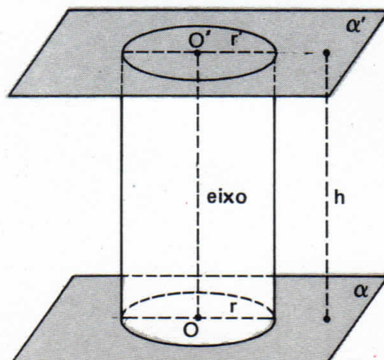
186. Definição:



Seja um círculo de centro **O** e raio **r** contido num plano α e um segmento $\overline{AB}$ não paralelo e nem contido em α.

Chama-se cilindro a reunião de todos os segmentos congruentes a $\overline{AB}$ e paralelos a $\overline{AB}$ com uma das extremidades nos pontos do círculo (pontos da circunferência e pontos da região interna a ela) e situados num mesmo semi-espaço em relação a α.

Os elementos do cilindro são:



Bases: são os dois círculos congruentes situados em planos paralelos.

Altura: é a distância entre as bases.

Geratriz: é qualquer segmento paralelo a AB compreendido entre os planos que contêm as bases do cilindro com extremidades nas circunferências dos círculos.

Eixo: é o segmento $\overline{OO'}$ que tem por extremidades os centros dos círculos que são bases do cilindro.

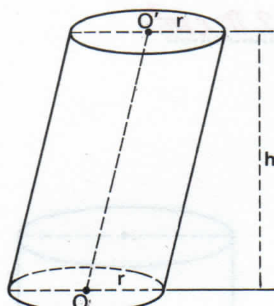
Secção meridiana: é a interseção do cilindro com um plano que contém o eixo do cilindro.

187. Tipos de cilindro:

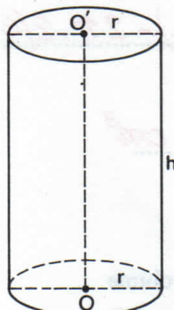
1 – **Cilindro reto ou de revolução:** é o cilindro cuja geratriz é perpendicular aos planos das bases. No cilindro reto a medida da geratriz é a altura do cilindro.

2 – **Cilindro oblíquo:** é o cilindro cuja geratriz não é perpendicular aos planos das bases.

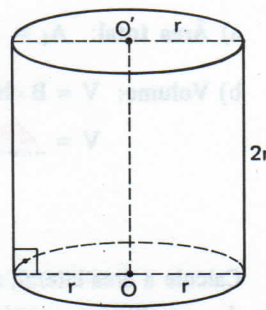
3 – **Cilindro eqüilátero:** é um cilindro reto cuja secção meridiana é um quadrado e portanto sua altura é igual à medida do diâmetro da base.



cilindro oblíquo



cilindro reto



cilindro eqüilátero

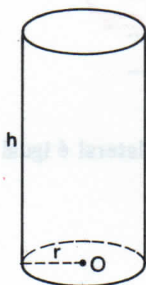
ÁREAS E VOLUME DE UM CILINDRO

188. Cilindro circular qualquer:

1 – **Área lateral** e **área total:** o cálculo da medida da superfície lateral e total de um cilindro qualquer não está ao nível do nosso curso.

2 – **Volume:** $V = B \cdot h$, onde B é a área da base dada por $B = \pi r^2$.

189. Cilindro reto ou de revolução:



1 – **Área lateral:** $A_\ell = 2\pi r \cdot h$

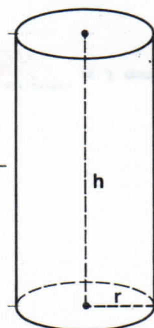
2 – **Área total:** $A_t = A_\ell + 2B \Rightarrow A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

$A_t = 2\pi r (h + r)$

3 – **Volume:** $V = B \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 h$

190. Aplicação:

1º) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro reto de 8 cm de raio e 10 cm de altura.



a) **Área lateral:**

$A_\ell = 2\pi r \cdot h =$ $2\pi \cdot 8 \cdot 10 = 160\pi\ cm^2$

b) **Área total:**

$A_t = 2\pi r (h + r) =$ $2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot (10 + 8) =$

$= 288\pi\ cm^2$

c) **Volume:**

$V = \pi r^2 \cdot h =$ $\pi \cdot (8)^2 \cdot 10 = 640\pi\ cm^3$

2º) Calcule a área total e o volume de um cilindro cuja área da base é 4π cm² e cuja altura é o triplo do raio.

Para calcular a área total, devemos calcular a medida da altura e a medida do raio.

Assim:

$$\left.\begin{array}{l} B = \pi r^2 \\ B = 4\pi \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \pi r^2 = 4\pi \Longrightarrow r = \sqrt{4} = 2 \text{ cm}$$

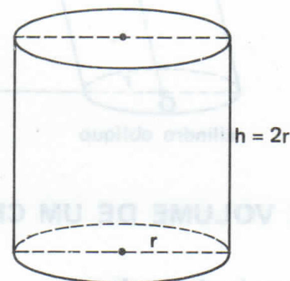
$$h = 3 \cdot r \Longrightarrow h = 3.2 = 6 \text{ cm}$$

a) **Área total:** $A_t = 2\pi r(h+r) = 2\pi.2(6+2) = 32\pi \text{ cm}^2$

b) **Volume:** $V = B \cdot h = \pi r^2 h$

$V = 4\pi.6 = 24\pi \text{ cm}^3$

3º) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro eqüilátero cuja secção meridiana tem 100 cm² de área.



Vamos calcular primeiramente a altura e o raio do cilindro:

$$\left.\begin{array}{l} \text{área da secção meridiana} = 100 \text{ cm}^2 \\ \text{área da secção meridiana} = 2r \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow 2r.h = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r \cdot 2r = 100 \Rightarrow 4 \cdot r^2 = 100 \Rightarrow r = 5 \text{ cm e } h = 2r = 10 \text{ cm}$$

Portanto: a) **Área lateral:** $A_\ell = 2\pi r.h = 2\pi.5.10 = 100\pi \text{ cm}^2$

b) **Área total:** $A_t = 2\pi r.(h+r) = 2\pi.5(10+5) = 150\pi \text{ cm}^2$

c) **Volume:** $V = \pi r^2 h = \pi.25.10 = 250\pi \text{ cm}^3$

4º) Calcule o volume de um cilindro cuja área total é igual a 144π cm² e cuja área lateral é igual ao dobro da área da base.

Como $V = B \cdot h = \pi r^2 h$, devemos calcular primeiramente a altura e o raio:

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = 2\pi r.h \\ A_\ell = 2 \cdot B \\ B = \pi r^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\pi r \cdot h = 2\pi r^2 \Longrightarrow h = r$$

$$\left.\begin{array}{l} A_t = 144\pi \text{ cm}^2 \\ A_t = 2\pi r \cdot (h + r) \\ h = r \end{array}\right\} \Longrightarrow 144\pi = 2\pi r \cdot (r + r) \Longrightarrow 72 = 2r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

Portanto: $V = \pi r^2.h = \pi 6^2.6 = 216\pi \text{ cm}^3$

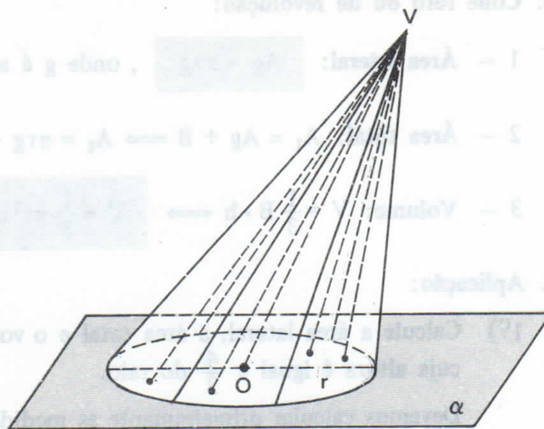
Exercícios a resolver: itens 1 a 11, pág. 204.

CONE

191. Definição:

Seja um círculo de centro O e raio r contido num plano α e um ponto V não pertencente a α.

Chama-se **cone circular ou cone** a reunião de todos os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo (pontos da circunferência e da região interna a ela).



Seus elementos são:

Base: é o círculo de centro O e raio r.

Altura: é a distância entre o vértice e o plano da base.

Geratriz: é qualquer segmento de reta com uma extremidade em V e outra na circunferência do círculo de centro O e raio r, base do cone.

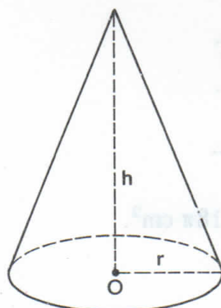
Secção meridiana: é a interseção do cone com um plano que contém o vértice e o centro da base.

192. Tipos de cone:

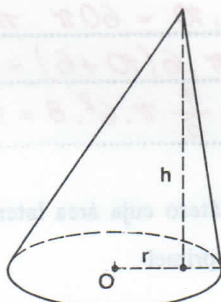
1 – **Cone reto** ou **cone de revolução**: é o cone no qual a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.
A geratriz de um cone reto é chamada **apótema do cone.**

2 – **Cone oblíquo**: é o cone no qual a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base não é o centro da base.

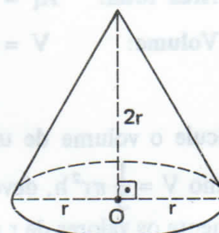
3 – **Cone eqüilátero:** é o cone reto cuja secção meridiana é um triângulo eqüilátero.
A geratriz de um cone eqüilátero tem a mesma medida do diâmetro da base.



cone reto



cone oblíquo



cone eqüilátero

ÁREAS E VOLUME DE UM CONE

193. Cone oblíquo:

1 – **Área lateral** e **área total**: o seu cálculo não está ao nível do nosso curso.

2 – **Volume:**

$V = \frac{1}{3} B \cdot h$, onde B é a área da base, que é dada por $B = \pi r^2$.

Então: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

194. Cone reto ou de revolução:

1 – **Área lateral:** $A_\ell = \pi r g$, onde g é a medida da geratriz do cone.

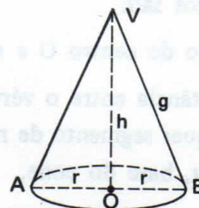
2 – **Área total:** $A_t = A_\ell + B \Longrightarrow A_t = \pi r g + \pi r^2 \Longrightarrow$ $A_t = \pi r(g + r)$

3 – **Volume:** $V = \frac{1}{3} B \cdot h \Longrightarrow$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

195. Aplicação:

1º) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cone reto cuja área da secção meridiana é 48 m^2 e cuja altura é igual a $\frac{4}{3}$ do raio.

Devemos calcular primeiramente as medidas do raio e da geratriz do cone.



Então:

$$\left.\begin{array}{l} \text{área da secção} = \dfrac{2r \cdot h}{2} \\ \text{área da secção} = 48 \text{ m}^2 \\ h = \dfrac{4}{3} r \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2rh}{2} = 48 \Rightarrow r \cdot \frac{4}{3} r = 48 \Rightarrow r^2 = \frac{48.3}{4} = 36 \Rightarrow r = 6 \text{ m}$$

r = 6 m, vem que $h = \frac{4.6}{3} = 8 \text{ m}$

A medida da geratriz do cone é dada por Pitágoras: $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow$

$\Longrightarrow g = \sqrt{100} = 10 \text{ m}$

Portanto:

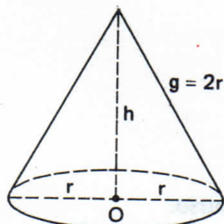
a) **Área lateral:** $A_\ell = \pi r g = \pi . 6 . 10 = 60\pi \text{ m}^2$

b) **Área total:** $A_t = \pi r(g + r) = \pi . 6(10 + 6) = 96\pi \text{ m}^2$

c) **Volume:** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi . 6^2 . 8 = 96\pi \text{ m}^3$

2º) Calcule o volume de um cone eqüilátero cuja área lateral é igual a $18\pi \text{ cm}^2$.

Como $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, devemos calcular primeiramente os valores de r e h.



cone eqüilátero $\Rightarrow g = 2.r$

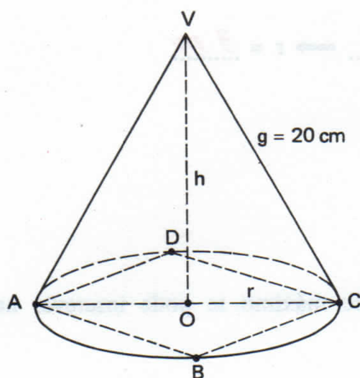
$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = \pi r g \\ A_\ell = 18\pi \text{ cm}^2 \\ g = 2r \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow 18\pi = \pi r . 2r \Rightarrow \\ \Longrightarrow r^2 = \dfrac{18}{2} \Rightarrow r = 3 \text{ cm} \end{array}$$

Por Pitágoras, vem:

$g^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow (2r)^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow h^2 = 4r^2 - r^2 \Longrightarrow h = \sqrt{3 . r^2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

Portanto: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Longrightarrow V = \frac{1}{3}\pi 3^2 . 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$

3º) Calcule a área total e o volume de um cone reto, sabendo que a sua secção meridiana é um triângulo isósceles onde cada um dos lados congruentes mede 20 cm e que a base é um círculo em que pode ser inscrito um quadrado de 288 cm² de área.



Devemos calcular r e h do seguinte modo:

área do quadrado = 288 cm²
área do quadrado = $\ell_4^2 = 2r^2$
$\Longrightarrow 2r^2 = 288 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow r = \sqrt{144} = 12\text{ cm}$

Aplicando Pitágoras, vem: $g^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow 20^2 = h^2 + 12^2$

$\Longrightarrow h^2 = 400 - 144 \Longrightarrow h = \sqrt{256} = 16\text{ cm}$

Portanto:

a) **Área total:**

$A_t = \pi r(g+r) = \pi \cdot 12(20+12) = 384\pi\text{ cm}^2$

b) **Volume:**

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\, 12^2 \cdot 16 = 768\pi\text{ cm}^3$

Exercícios a resolver: itens 12 a 19, pág. 205.

ESFERA

196. Definição:

Seja r um número real positivo e O um ponto do espaço.

Chama-se **esfera** de raio r e centro **O** o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância ao ponto **O** é menor ou igual a r.

197. Área e volume:

1 — **Área total:** $A_t = 4\pi r^2$

2 — **Volume:** $A = \frac{4}{3}\pi r^3$

198. Observação: A interseção de uma esfera com qualquer plano que contém o seu centro é um círculo (círculo máximo) de mesmo centro e raio igual ao dessa esfera.

199. Aplicação:

1º) Calcule o volume de uma esfera cuja área total é 16π cm².

Como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, devemos calcular primeiramente o raio da esfera do seguinte modo:

$A_t = 4\pi r^2$
$A_t = 16\pi\text{ cm}^2$
$\Longrightarrow 4\pi r^2 = 16\pi \Longrightarrow r^2 = 4 \Longrightarrow r = 2\text{ cm}$

Portanto: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi\text{ cm}^3$

2º) Calcule a área do círculo máximo de uma esfera cujo volume é 36π m³.

Como o raio do círculo máximo é igual ao raio da esfera, vem:

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ V = 36\pi\ m^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Longrightarrow r^3 = 27 \Longrightarrow r = 3\ m$$

Portanto, a área do círculo máximo é:

$A = \pi r^2 = \pi 3^2 = 9\pi m^3$

3º) Calcule a área e o volume de uma esfera em cujo círculo máximo se pode inscrever um triângulo eqüilátero de $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm² de área.

Como o raio da esfera é igual ao raio do círculo máximo, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \text{área do triângulo} = \frac{\ell_3^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{área do triângulo} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\ell_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell_3^2 = 75 \Rightarrow \ell_3 = 5\sqrt{3}\ cm$$

Sendo $\ell_3 = r\sqrt{3}$, vem: $5\sqrt{3} = r\sqrt{3} \Longrightarrow r = 5\ cm$

Portanto:

a) $A_t = 4\pi r^2 = 4\pi . 5^2 = 100\pi\ cm^2$

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi\ cm^3$

Exercícios a resolver: itens 20 a 23, pág. 205.

EXERCÍCIOS

SEQÜÊNCIA A

1) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro reto que tem:

a) 5 cm de raio e 12 cm de altura.
b) 4 cm de raio e 15 cm de altura.
c) 1,2 cm de raio e 5,8 cm de altura.

2) Calcule a área total e o volume de um cilindro cuja área da base é 144π cm² e cuja altura é igual a $\frac{2}{3}$ do raio.

3) Calcule a área lateral e a área total de um cilindro eqüilátero cujo volume é 250 cm³.

4) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro eqüilátero cuja área da base é igual a 25π cm².

5) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro reto, sabendo que o raio da base é igual a 6 cm e que a área de sua secção meridiana é igual à área da base.

6) Calcule o raio, a altura e a área total de um cilindro cujo volume é igual a 45π cm³ e a área lateral 30π cm².

7) Calcule o volume de um cilindro reto cuja altura é 4 cm e cuja área total é igual a 280π cm², sabendo que sua área lateral é igual a $\frac{4}{5}$ da área da base.

8) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cilindro eqüilátero cuja secção meridiana tem 576 cm² de área.

9) Calcule a razão entre a área lateral e a área total de um cilindro eqüilátero.

10) Dois cilindros retos têm diâmetros iguais às alturas. A razão entre os seus volumes é $\frac{27}{125}$. Calcule a razão entre as alturas.

11) Aumentando-se de 6 unidades o raio ou a altura de um cilindro reto, o seu volume aumenta de y unidades cúbicas. Sendo 2 cm a altura original do cilindro, calcule o raio original.

12) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cone de revolução, onde o raio, a altura e a geratriz valem respectivamente:

a) r = 18 m, h = 24 m e g = 30 m.
b) r = 9 m, h = 12 cm e g = 15 cm.
c) r = 1,2 m, h = 1,6 cm e g = 2 cm.

13) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cone reto cuja base é um círculo de 8 cm de raio e cuja altura é igual aos $\frac{3}{4}$ do raio da base.

14) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cone reto, sabendo que a área de sua secção meridiana é igual a 60 cm^2 e que sua altura é igual a $\frac{12}{5}$ do raio.

15) Calcule o volume de um cone eqüilátero, sabendo que sua área lateral é igual a $72\pi\ cm^2$.

16) Calcule a área total e o volume de um cone eqüilátero, sabendo que sua área lateral é igual a $6\pi\ cm^2$.

17) Calcule a área total e o volume de um cone circular reto cuja altura é igual a 3 m e cuja área lateral é igual a $6\pi\ cm^2$.

18) Calcule a área lateral de um cone reto, sabendo que sua área total é o triplo da área da base e que a sua altura é igual a $4\sqrt{3}$ m.

19) Calcule a área lateral, a área total e o volume de um cone, sabendo que sua secção meridiana é um triângulo isósceles de 4 cm de altura e que sua base é um círculo em que pode ser inscrito um triângulo eqüilátero de área $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

20) Calcule o volume de uma esfera cuja área total é igual a $36\pi\ cm^2$.

21) Calcule a área total de uma esfera, sabendo que seu volume é igual a $288\pi\ cm^3$.

22) Calcule a área total de uma esfera cujo raio é igual à medida do lado de um triângulo eqüilátero que pode ser inscrito num círculo de 5 cm de raio.

23) Calcule a área total e o volume de uma esfera em cujo círculo máximo poderá ser inscrito um hexágono regular de apótema $6\sqrt{3}$ cm.

RESPOSTAS

1) a) $A\ell = 120\pi\ cm^2$, $A_t = 170\pi\ cm^2$, $V = 300\pi\ cm^3$
b) $A\ell = 120\pi\ cm^2$, $A_t = 152\pi\ cm^2$, $V = 240\pi\ cm^3$
c) $A\ell = 13{,}92\pi\ cm^2$, $A_t = 16{,}8\pi\ cm^2$, $V = 8{,}352\pi\ cm^3$

2) $A_t = 480\pi\ cm^2$, $V = 1152\pi\ cm^3$

3) $A\ell = 100\pi\ cm^2$, $A_t = 150\pi\ cm^2$

4) $A\ell = 50\pi\ cm^2$, $A_t = 150\pi\ cm^2$, $V = 250\pi\ cm^3$

5) $A\ell = 36\pi\ cm^2$, $A_t = 36\pi(\pi + 2)\ cm^2$, $V = 108\pi^2\ cm^3$

6) r = 3 cm, h = 5 cm, $A_t = 48\pi\ cm^2$

7) $V = 400\pi\ cm^3$

8) $A\ell = 576\pi\ cm^2$, $A_t = 864\pi\ cm^2$, $V = 3\,456\pi\ cm^3$

9) $\frac{A\ell}{A_t} = \frac{2}{3}$

10) $\frac{h}{h'} = \frac{3}{5}$

11) r = 6 cm

12) a) $A\ell = 540\pi\ m^2$, $A_t = 864\pi\ m^2$, $V = 2592\pi\ m^3$
b) $A\ell = 135\pi\ cm^2$, $A_t = 126\pi\ cm^2$, $V = 324\pi\ cm^3$
c) $A\ell = 2{,}4\pi\ cm^2$, $A_t = 3{,}84\pi\ cm^2$, $V = 0{,}768\pi\ cm^3$

13) $A\ell = 80\pi\ cm^2$, $A_t = 144\pi\ cm^2$, $V = 128\pi\ cm^3$

14) $A\ell = 65\pi\ cm^2$, $A_t = 90\pi\ cm^2$, $V = 100\pi\ cm^3$

15) $V = 72\sqrt{3}\ \pi\ cm^3$

16) $A_t = 9\pi\ cm^2$, $V = 3\pi\ cm^3$

17) $A_t = 9\pi\ cm^2$, $V = 3\pi\ cm^3$

18) $A\ell = 32\pi\ m^2$

19) $A\ell = 15\pi\ cm^2$, $A_t = 24\pi\ cm^2$, $V = 12\pi\ cm^3$

20) $V = 36\pi\ cm^3$

21) $A_t = 144\pi\ cm^2$

22) $A_t = 300\pi\ cm^2$

23) $A_t = 576\pi\ cm^2$, $V = 2304\pi\ cm^3$

SEQÜÊNCIA B

1) Calcule o volume de um prisma reto, sabendo que sua altura é 5 cm e que sua base é um triângulo eqüilátero que pode ser inscrito no círculo máximo de uma esfera de $\frac{32\pi}{3}$ cm^3 de volume.

$V = 15\sqrt{3}\ cm^3$

2) O apótema de uma pirâmide regular é o dobro do apótema da base. Calcule a medida do diedro formado pelas faces laterais com a base.

$\alpha = 60°$

3) Calcule o volume de um cilindro eqüilátero, inscrito numa esfera de raio $3\sqrt{2}$ cm.

$V = 54\pi\ cm^3$

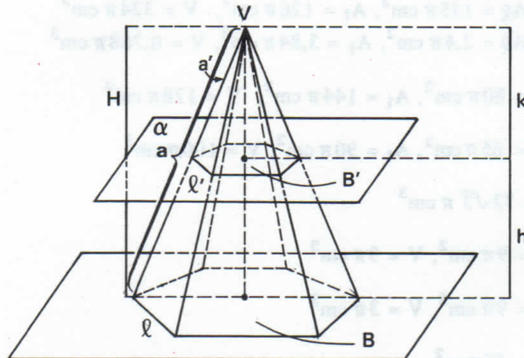
4) Determine a razão entre o volume da esfera e o volume do cilindro eqüilátero nela inscrito.

$\frac{V_e}{V_c} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

5) A secção reta de um prisma oblíquo é um losango de área 24 cm^2 e suas diagonais estão na razão de 4 para 3. Calcule a área lateral desse prisma, sabendo que a aresta lateral mede 6 cm.

$A_\ell = 120\ cm^2$

6) Sabendo que:



1º) o volume do tronco de pirâmide é dado pela relação:

$$V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{B \cdot B'}),$$

onde h é a altura do tronco e B e B' as áreas das bases.

2º) $\frac{B}{B'} = \frac{H^2}{k^2}$, onde H é a altura da pirâmide e k é a distância do plano α ao vértice V.

3º) $\frac{B}{B'} = \frac{\ell^2}{\ell'^2}$, onde ℓ e ℓ' são medidas das arestas das bases do tronco.

Calcule:

a) o volume de um tronco de pirâmide cujas bases são hexágonos regulares de lados 6 cm e 2 cm e cuja altura é igual a 12 cm.

$V = 312\sqrt{3}\ cm^3$

b) a altura de um tronco de pirâmide cujas bases são quadrados de lados 5 cm e 2 cm, sabendo que o seu volume é igual a 195 cm^3.

$h = 15\ cm$

c) o volume de um tronco de pirâmide, sabendo que a sua altura é igual a 6 m, sua base inferior a um polígono de 20 m^2 de área e que a medida de um dos lados da base inferior é 4 m e a do lado correspondente na base superior é 3 m.

$V = \frac{185}{2}\ cm^3$

d) a área da secção determinada por um plano paralelo à base, a $\frac{2}{3}$ do vértice de uma pirâmide cuja base tem 225 m^2 de área.

$S = 100\ m^2$

Este livro foi impresso
nas oficinas da

SÃO PAULO EDITORA S. A.
Rua Barão de Ladário, 226
03010 São Paulo, SP — Brasil,
com filmes fornecidos pelo editor

MAI

edição SARAIVA